Equazione di Fokker-Planck

§1 Introduzione

In molti sistemi dinamici le forze d'interazione fra le particelle costituenti il sistema decrescono lentamente con la distanza. Basti pensare, per esempio, alle interazioni fra particelle cariche, o fra corpi celesti, che sono governate da forze proporzionali all'inverso del quadrato della distanza delle particelle, o dei corpi, che interagiscono ~~urtano~~. Per questi sistemi, gli urti distanti con piccoli angoli di deflessione possono essere molto più frequenti e importanti degli urti vicini con grandi angoli di deflessione. Questo permette di semplificare notevolmente il termine di collisione dell'equazione cinetica per la funzione di distribuzione semplice f. Focalizziamo la nostra attenzione su di un sistema costituito da particelle cariche (per esempio un plasma completamente ionizzato) e consideriamo le 3 lunghezze caratteristiche

8-4-206

r_0 = parametro d'urto per una deflessione di $90°$ $\left(\chi = \frac{\pi}{2}\right)$

$= n^{-\frac{1}{3}} =$ distanza media fra le particelle (n = densità delle particelle)

r_D = raggio di Debye.

Ricordiamo che il raggio di Debye, detto anche "lunghezza di schermaggio Coulombiano", rappresenta la distanza limite fra 2 particelle oltre la quale l'interazione Coulombiana può essere trascurata per l'effetto di schermaggio elettrostatico prodotto dalle altre particelle cariche. In altre parole, una particella carica interagisce singolarmente, anche se simultaneamente, con effetti non trascurabili sulla sua traiettoria, solo con le particelle la cui distanza da essa è $\leq L_D$. Le particelle situate fuori dalla sfera di raggio uguale a L_D (detta sfera di Debye), avente il centro coincidente con la particella "test" considerata, non urtano singolarmente con la particella test, ma possono interagire con essa solo attraverso collisioni collettive ~~(od organizzate)~~ (od organizzate). Abbiamo visto che questi moti collettivi danno origine al "campo di carica spaziale" e sono, pertanto, i responsabili delle interazioni fra le particelle come descritte nell'equazione di Vlasov. Viceversa, i fenomeni che sorgono da interazioni con le particelle contenute nella sfera di Debye debbono essere analizzati in termini di urti singoli che, tuttavia, possono aver luogo simultaneamente. Mentre, però, per i singoli urti binari fra 2 particelle il termine di collisione è descritto dall'integrale di collisione di Boltzmann, rimane aperto il problema delle interazioni binarie simultanee fra la particella test e le altre particelle contenute nella sfera di Debye. Il termine di collisione di Fokker-Planck risolve questo problema, se si verifica l'eventualità, sopra riportata, del prevalere degli urti con piccole deflessioni sulle collisioni con piccolo parametro d'urto (che sono essenzialmente singoli incontri binari).

Per concretizzare un po' meglio quanto abbiamo detto, riferiamoci alle 3 lunghezze caratteristiche introdotte precedentemente, b_0, d, L_D, e suddividiamo i vari tipi di urti e deflessioni confrontando il parametro d'urto, b, con queste 3 lunghezze. Si possono verificare le seguenti 3 relazioni:

1°) $0 \leq b \leq$ alcuni b_0 $\Rightarrow$ deflessioni con grandi angoli;

2°) alcuni $b_0 \leq b \leq d$ $\Rightarrow$ principalmente urti binari con piccoli angoli di deflessione;

3°) $d \leq b \leq L_D$ $\Rightarrow$ interazioni multiple simultanee; la somma delle forze sulla particella test è generalmente piccola e varia molto rapidamente.

Se le situazioni descritte dai punti 2° e 3° sono molto più frequenti di quella del punto 1°, la particella test compirà molte piccole deflessioni, descrivendo una traiettoria con piccoli angoli, e solo raramente avverranno deflessioni con grandi angoli ($\gtrsim 90°$).

Sotto queste ipotesi la variazione di velocità $\Delta\vec{v}$ in un urto (o durante l'intervallo di tempo Δt sufficientemente piccolo) è una quantità piccola che ci consente di eseguire uno sviluppo in serie e ricavare quindi l'equazione di Fokker-Planck.

2 L'equazione di Fokker-Planck

Le 3 ipotesi fondamentali che sono alla base della determinazione del termine di collisione di Fokker-Planck sono:

1°) che il processo sia Markoviano(*); 2°) che gli urti siano elastici; 3°) che gli urti del tipo 2° e 3° del paragrafo precedente siano preponderanti.

(*) Nell'ambito della teoria della probabilità, un processo stocastico è detto essere un "processo Markoviano" se l'evoluzione di tale processo avviene in modo che ciò che accadrà nel futuro dipende solo dal presente, ma non dagli stati passati del sistema. Più precisamente, consideriamo il susseguirsi di 3 eventi a, b, c; la probabilità della successione di questi eventi può essere espressa in termini della probabilità del verificarsi dell'evento a e della probabilità di transizione $a \to b$, $b \to c$. Se ciascuna delle probabilità di transizione dipende solo dai 2 stati che sono interessati nella transizione, ma non dalla storia precedente, una tale successione di eventi è detta costituire un processo (o una catena) Markoviano.

Supponiamo che le particelle di un sistema omogeneo, privo di forze esterne, percorra un cammino (una traiettoria) "casuale", simile al moto Browniano, come risultato di un gran numero di piccole deflessioni. Un tale processo "stocastico" può essere descritto ricorrendo alla funzione probabilità di transizione, $P(\vec{v}, \Delta\vec{v})$, definita come la probabilità che ~~nel temp~~ nell'intervallo di tempo Δt una particella con velocità $\vec{v}$ abbia un incremento di velocità pari a $\Delta\vec{v}$. Supponiamo che la funzione probabilità $P(\vec{v}, \Delta\vec{v})$ non dipenda esplicitamente dal tempo; in altre parole supponiamo che la funzione di distribuzione delle particelle, f, si evolva indipendentemente dalla sua storia, indipendentemente cioè dai valori che la f ha assunto precedentemente. Il cammino casuale delle particelle del sistema costituisce quindi un processo Markoviano.

La funzione di distribuzione al tempo t è, perciò, data da:

$$f(\vec{v}, t) = \int f(\vec{v} - \Delta\vec{v}, t - \Delta t)\, P(\vec{v} - \Delta\vec{v}, \Delta\vec{v})\, d(\Delta\vec{v}) \qquad (1)$$