Prova scritta di trasporto di neutroni, 19 luglio 2013

Si abbia un mezzo infinito, isotropo, omogeneo, senza assorbimento, di sezione d'urto nota $\Sigma = \Sigma_s$. In tale mezzo agiscono 2 sorgenti piane, infinite lungo le direzioni x ed y, e di spessore nullo, ubicate rispettivamente in $z = z_0$ e $z = -z_0$. Sia poi presente sul piano x-y una lamina perfettamente assorbente (cioè tutti i neutroni che vi incidono vengono assorbiti) abbastanza sottile da poterla trattare come avente spessore nullo. Si determini $\Phi(\overline{x})$.

La presenza dell'assorbitore perfetto fa sì che i due semispazi siano completamente disaccoppiati, sarà quindi sufficiente risolvere il problema per $z > 0$ e poi riflettere per simmetria la soluzione per trovare anche l'andamento per $z < 0$.

Iniziamo dall'equazione di diffusione (ovvia la simmetria piana: dipende tutto solo da z):

$$\frac{d^2}{dz^2}\Phi(z)+\frac{Q}{D}\delta(z-z_0)=0$$

La condizione al contorno per $z = 0^+$ è che non vi è corrente uscente dalla lamina perfettamente assorbente, ovvero:

$$\lim_{z\to 0^+} J^+(z)=0$$

Applichiamo dunque tale condizione:

$$\lim_{z\to 0^+}\left[\frac{\Phi(z)}{4}-\frac{D}{2}\frac{d\Phi(z)}{dz}\right]=0$$

e detti rispettivamente

$$\Phi_0 = \lim_{z\to 0^+}\Phi(z) \qquad \Phi'_0 = \lim_{z\to 0^+}\frac{d\Phi(z)}{dz}$$

otteniamo la semplice relazione:

$$\Phi'_0 = \frac{\Phi_0}{2D}$$

Trasformiamo ora l'equazione di diffusione secondo Laplace, indicando con $\Psi(s)$ la trasformata del flusso:

$$s^2\Psi(s)-s\Phi_0-\Phi'_0+\frac{Q}{D}e^{-z_0 s}=0$$

Caso con assorbimento

Iniziamo scrivendo l'equazione di diffusione per il caso in esame:

$$\frac{d^2}{dz^2}\Phi(z)-\frac{1}{L^2}\Phi(z)+\frac{Q}{D}\delta(z-z_0)=0$$

La presenza dell'assorbitore perfetto fa sì che i due semispazi siano completamente disaccoppiati, sarà quindi sufficiente risolvere il problema per $z>0$ e poi riflettere per simmetria la soluzione per trovare anche l'andamento per $z<0$. La condizione al contorno per $z=0^+$ sarà che non vi è corrente uscente dalla lamina assorbente, ovvero:

$$\lim_{z\to 0^+} J^+(z)=0$$

Viceversa nulla porta a concludere che la corrente entrante debba essere nulla, naturalmente. Applichiamo dunque tale condizione:

$$\lim_{z\to 0^+}\left[\frac{\Phi(z)}{4}-\frac{D}{2}\frac{d\Phi(z)}{dz}\right]=0$$

e detti rispettivamente

$$\Phi_0=\lim_{z\to 0^+}\Phi(z) \qquad\qquad \Phi'_0=\lim_{z\to 0^+}\frac{d\Phi(z)}{dz}$$

otteniamo una semplice relazione:

$$\Phi'_0=\frac{\Phi_0}{2D}$$

Trasformiamo ora l'equazione di diffusione secondo Laplace, indicando con $\Psi(s)$ la trasformata del flusso:

$$s^2\Psi(s)-s\Phi_0-\Phi'_0-\frac{1}{L^2}\Psi(s)+\frac{Q}{D}e^{-z_0 s}=0$$

da cui risolvendo per $\Psi(s)$ e utilizzando la relazione trovata poc'anzi:

$$\Psi(s)=\frac{s\Phi_0+\frac{1}{2D}\Phi_0-\frac{Q}{D}e^{-z_0 s}}{s^2-\frac{1}{L^2}}$$

da cui risolvendo per $\Psi(s)$ e utilizzando la relazione trovata poc'anzi per eliminare Φ'_0:

$$\Psi(s)=\frac{s\Phi_0+\frac{1}{2D}\Phi_0-\frac{Q}{D}e^{-z_0 s}}{s^2}=\Phi_0\frac{1}{s}+\frac{\Phi_0}{2D}\frac{1}{s^2}-\frac{Q}{D}\frac{e^{-z_0 s}}{s^2}$$

l'antitrasformazione è immediata:

$$\Phi(z)=\Phi_0+\frac{\Phi_0}{2D}z-\frac{Q}{D}(z-z_0)U(z-z_0)$$

Per la regione $z>z_0$ avremo

$$\Phi(z)=\Phi_0+\frac{Q}{D}z_0+z\left(\frac{\Phi_0}{2D}-\frac{Q}{D}\right)$$

e perché la soluzione non diverga all'infinito occorre che il coefficiente di z sia nullo, quindi

$$\Phi_0=2Q$$

Per $0<z<z_0$

$$\Phi(z)=\Phi_0+\frac{\Phi_0}{2D}z=2Q\left(1+\frac{z}{2Q}\right)$$

quindi ricapitolando:

$$\Phi(z)=\begin{cases}\Phi(z)=2Q\left(1+\dfrac{z}{2D}\right) & 0<z<z_0\\[2ex] \Phi(z)=2Q\left(1+\dfrac{z_0}{2D}\right) & z>z_0\end{cases}$$

Osserviamo ora, a titolo di riscontro, che allo stato stazionario il numero di neutroni emessi nell'unità di tempo deve uguagliare quello dei neutroni assorbiti nell'unità di tempo, quindi la somma degli assorbimenti nel mezzo e dell'assorbimento da parte della lamina. Nel caso considerato l'assorbimento nel mezzo è nullo, quindi la produzione deve uguagliare l'assorbimento della sola lamina. Calcoliamo la corrente entrante nella lamina:

$$J^-(0^+)=D\frac{d}{dz}\left[2Q\left(1+\frac{z}{2D}\right)\right]_{0^+}=D\cdot 2Q\cdot\frac{1}{2D}=Q$$

e si vede che la condizione è rispettata.

ovvero:

$$\Psi(s)=\frac{s}{s^2-\frac{1}{L^2}}\Phi_0+\frac{L}{2D}\Phi_0\frac{\frac{1}{L}}{s^2-\frac{1}{L^2}}-\frac{LQ}{D}e^{-z_0 s}\frac{\frac{1}{L}}{s^2-\frac{1}{L^2}}$$

la cui antitrasformazione è immediata:

$$\Phi(z)=\Phi_0\cosh\tfrac{z}{L}+\frac{L}{2D}\Phi_0\,\mathrm{senh}\tfrac{z}{L}-\frac{LQ}{D}\mathrm{senh}\tfrac{z-z_0}{L}\,U(z-z_0)$$

Consideriamo dapprima la regione $z>z_0$: scomponendo le funzioni iperboliche nelle esponenziali che le compongono possiamo riscrivere l'ultima equazione come

$$\Phi(z)=\left[\frac{\Phi_0}{2}\left(1+\frac{L}{2D}\right)-\frac{LQ}{2D}e^{-\frac{z_0}{L}}\right]e^{\frac{z}{L}}+\left[\frac{\Phi_0}{2}\left(1-\frac{L}{2D}\right)+\frac{LQ}{2D}e^{\frac{z_0}{L}}\right]e^{-\frac{z}{L}}$$

Ora applichando la condizione all'infinito: $\lim_{z\to+\infty}\Phi(z)=0$, si vede che il coefficiente dell'esponenziale positiva deve essere nullo, e troviamo così la relazione cercata tra l'incognita Φ_0 e la sorgente:

$$\frac{\Phi_0}{2}=\frac{LQ}{2D}\frac{e^{-\frac{z_0}{L}}}{1+\frac{L}{2D}}$$

e con qualche passaggio possiamo scrivere la soluzione per il flusso (sempre per $z>z_0$):

$$\Phi(z)=\frac{2LQ}{2D+L}\left(\cosh\tfrac{z_0}{L}+\frac{L}{2D}\mathrm{senh}\tfrac{z_0}{L}\right)e^{-\frac{z}{L}}$$

Vediamo ora la regione $0<z<z_0$: qui la soluzione manca del termine contenente la funzione di Heaviside, e rimane

$$\Phi(z)=\Phi_0\cosh\tfrac{z}{L}+\frac{L}{2D}\Phi_0\,\mathrm{senh}\tfrac{z}{L}$$

Anche qui con qualche passaggio, ed introducendo il valore ormai noto di Φ_0, troviamo la soluzione:

$$\Phi(z)=\frac{2LQ}{2D+L}e^{-\frac{z_0}{L}}\left(\cosh\tfrac{z}{L}+\frac{L}{2D}\mathrm{senh}\tfrac{z}{L}\right)$$

L'andamento al tendere a zero dell'assorbimento, cioè al tendere a infinito della lunghezza di diffusione si trova facilmente come limite:

$$\lim_{L\to\infty}\Phi(z)=\begin{cases}\Phi(z)=2Q\left(1+\dfrac{z}{2D}\right) & 0<z<z_0\\[2ex] \Phi(z)=2Q\left(1+\dfrac{z_0}{2D}\right) & z>z_0\end{cases}$$

Tornando alla soluzione per L generale, osserviamo ora, a titolo di riscontro, che allo stato stazionario il numero di neutroni emessi nell'unità di tempo deve uguagliare quello dei neutroni assorbiti nell'unità di tempo, quindi la somma degli assorbimenti nel mezzo e dell'assorbimento da parte della lamina.

$$\int_0^\infty \Sigma_a\Phi(z)dz+J^-\left(0^+\right)=Q$$

Utilizzando gli andamenti trovati per il flusso, e osservando che (essendo $J^+\left(0^+\right)=0$) si avrà per la semicorrente negativa

$$J^-\left(0^+\right)=-J\left(0^+\right)=D\left.\frac{d\Phi}{dz}\right|_{z=0^+}$$

troviamo rapidamente per la somma degli assorbimenti:

$$\Sigma_a\frac{2LQ}{2D+L}e^{-\frac{z_0}{L}}\int_0^{z_0}\left(\cosh\tfrac{z}{L}+\frac{L}{2D}\operatorname{senh}\tfrac{z}{L}\right)dz+$$

$$\Sigma_a\frac{2LQ}{2D+L}\left(\cosh\tfrac{z_0}{L}+\frac{L}{2D}\operatorname{senh}\tfrac{z_0}{L}\right)\int_{z_0}^\infty e^{-\frac{z}{L}}dz+$$

$$D\frac{2LQ}{2D+L}e^{-\frac{z_0}{L}}\frac{1}{L}\left[\operatorname{senh}\tfrac{z}{L}+\frac{L}{2D}\cosh\tfrac{z}{L}\right]_{z=0^+}$$

e calcolando gli integrali:

$$\Sigma_a \frac{2LQ}{2D+L} e^{-\frac{z_0}{L}} L\left[\operatorname{senh}\tfrac{z}{L} + \frac{L}{2D}\cosh\tfrac{z}{L}\right]_0^{z_0} +$$

$$\Sigma_a \frac{2LQ}{2D+L}\left(\cosh\tfrac{z_0}{L} + \frac{L}{2D}\operatorname{senh}\tfrac{z_0}{L}\right) L\left[-e^{-\frac{z}{L}}\right]_{z_0}^{\infty} +$$

$$\frac{2LQ}{2D+L} e^{-\frac{z_0}{L}}$$

$$\Sigma_a \frac{2LQ}{2D+L} e^{-\frac{z_0}{L}} L\left(\operatorname{senh}\tfrac{z_0}{L} + \frac{L}{2D}\cosh\tfrac{z_0}{L} - \frac{L}{2D}\right) +$$

$$\Sigma_a \frac{2LQ}{2D+L}\left(\cosh\tfrac{z_0}{L} + \frac{L}{2D}\operatorname{senh}\tfrac{z_0}{L}\right) L e^{-\frac{z_0}{L}} +$$

$$\frac{2LQ}{2D+L} e^{-\frac{z_0}{L}}$$

$$\Sigma_a \frac{2L^2Q}{2D+L} e^{-\frac{z_0}{L}}\left(\operatorname{senh}\tfrac{z_0}{L} + \frac{L}{2D}\cosh\tfrac{z_0}{L}\right) +$$

$$\Sigma_a \frac{2L^2Q}{2D+L} e^{-\frac{z_0}{L}}\left(\cosh\tfrac{z_0}{L} + \frac{L}{2D}\operatorname{senh}\tfrac{z_0}{L}\right) =$$

$$\Sigma_a \frac{2L^2Q}{2D+L} e^{-\frac{z_0}{L}} e^{\frac{z_0}{L}}\left(1 + \frac{L}{2D}\right) = \left(\Sigma_a L^2\right)\frac{2Q}{2D+L}\frac{2D+L}{2D} = Q$$

confermando quindi la soluzione trovata.

Proviamo a ripetere il procedimento per il caso di assorbimento nullo: in tal caso la produzione deve uguagliare l'assorbimento della sola lamina. Calcoliamo la corrente entrante:

$$J^-\left(0^+\right) = D\frac{d}{dz}\left[2Q\left(1 + \frac{z}{2D}\right)\right]_{0^+} = D \cdot 2Q \cdot \frac{1}{2D} = Q$$

Anche in questo caso la condizione è rispettata.

Caso senza assorbimento

Possiamo ricavare direttamente la soluzione, che confronteremo con il limite per $L \to \infty$ già trovato. Iniziamo dall'equazione di diffusione:

$$\frac{d^2}{dz^2}\Phi(z)+\frac{Q}{D}\delta(z-z_0)=0$$

Come nel caso precedente, la presenza dell'assorbitore perfetto fa sì che i due semispazi siano completamente disaccoppiati, sarà quindi sufficiente risolvere il problema per $z>0$ e poi riflettere per simmetria la soluzione per trovare anche l'andamento per $z<0$. La condizione al contorno per $z=0^+$ sarà ancora che non vi è corrente uscente dalla lamina assorbente, ovvero:

$$\lim_{z\to 0^+} J^+(z)=0$$

Applichiamo dunque tale condizione:

$$\lim_{z\to 0^+}\left[\frac{\Phi(z)}{4}-\frac{D}{2}\frac{d\Phi(z)}{dz}\right]=0$$

e detti rispettivamente

$$\Phi_0=\lim_{z\to 0^+}\Phi(z) \qquad\qquad \Phi'_0=\lim_{z\to 0^+}\frac{d\Phi(z)}{dz}$$

otteniamo la semplice relazione:

$$\Phi'_0=\frac{\Phi_0}{2D}$$

Trasformiamo ora l'equazione di diffusione secondo Laplace, indicando con $\Psi(s)$ la trasformata del flusso:

$$s^2\Psi(s)-s\Phi_0-\Phi'_0+\frac{Q}{D}e^{-z_0 s}=0$$

da cui risolvendo per $\Psi(s)$ e utilizzando la relazione trovata poc'anzi:

$$\Psi(s)=\frac{s\Phi_0+\frac{1}{2D}\Phi_0-\frac{Q}{D}e^{-z_0 s}}{s^2}=\Phi_0\frac{1}{s}+\frac{\Phi_0}{2D}\frac{1}{s^2}-\frac{Q}{D}\frac{e^{-z_0 s}}{s^2}$$

l'antitrasformazione è immediata:

$$\Phi(z)=\Phi_0+\frac{\Phi_0}{2D}z-\frac{Q}{D}(z-z_0)U(z-z_0)$$

Per la regione $z > z_0$ avremo

$$\Phi(z) = \Phi_0 + \frac{Q}{D} z_0 + z\left(\frac{\Phi_0}{2D} - \frac{Q}{D}\right)$$

e perché la soluzione non diverga all'infinito occorre che il coefficiente di z sia nullo, quindi

$$\Phi_0 = 2Q$$

Per $0 < z < z_0$

$$\Phi(z) = \Phi_0 + \frac{\Phi_0}{2D} z = 2Q\left(1 + \frac{z}{2Q}\right)$$

quindi ricapitolando:

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi(z) = 2Q\left(1 + \dfrac{z}{2D}\right) & 0 < z < z_0 \\ \Phi(z) = 2Q\left(1 + \dfrac{z_0}{2D}\right) & z > z_0 \end{cases}$$

che è la stessa soluzione trovata in precedenza.

Prova scritta di trasporto di neutroni, 13 settembre 2013

Una sorgente piana ed infinita che emette S $\frac{\text{neutroni}}{\text{cm}^2 - \text{s}}$ è posizionata in un moderatore con geometria slab, infinito lungo gli assi x ed y ed esteso in $z \in [0, 2a]$, inclusa la distanza di estrapolazione. La sorgente si trova sul piano $z = z_0$, con z_0 interno allo slab. Calcolare il flusso nell'approssimazione di diffusione.

Utilizzando uno sviluppo in serie di Fourier: $\Phi(z) = \sum \varphi_n R_n(z)$ ove $R_n(z) = \text{sen}\left(\frac{n\pi z}{2a}\right)$, e osservando che $\frac{d^2}{dz^2}\Phi(z) = \sum -\left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2 \varphi_n R_n(z)$ possiamo riscrivere l'equazione di diffusione:

$$\sum -\left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2 \varphi_n R_n(z) - \frac{1}{L^2}\sum \varphi_n R_n(z) + \frac{S}{D}\delta(z - z_0) = 0$$

dove come al solito $\frac{1}{L^2} = \frac{\Sigma_a}{D}$. Riordiniamo per comodità

$$\sum \left[\left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2 + \frac{1}{L^2}\right] \varphi_n R_n(z) = \frac{S}{D}\delta(z - z_0)$$

Facciamo ora il prodotto scalare con $R_k(z)$

$$< R_k(z) | \sum \left[\left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2 + \frac{1}{L^2}\right] \varphi_n R_n(z) > = \frac{S}{D} < R_k(z) | \delta(z - z_0) >$$

$$\sum \left[\left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2 + \frac{1}{L^2}\right] \varphi_n < R_k(z) | R_n(z) > = \frac{S}{D} R_k(z_0)$$

$$\sum \left[\left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2 + \frac{1}{L^2}\right] \varphi_n \, a \, \delta_{n,k} = \frac{S}{D} R_k(z_0)$$

$$\left[\left(\frac{k\pi}{2a}\right)^2 + \frac{1}{L^2}\right] \varphi_k \, a = \frac{S}{D} R_k(z_0)$$

$$\varphi_k = \frac{S}{a\,D}\frac{R_k(z_0)}{\left[\left(\frac{k\pi}{2a}\right)^2 + \frac{1}{L^2}\right]}$$

da cui infine la soluzione

$$\Phi(z) = \frac{S}{a\,D}\sum \frac{R_k(z_0)}{\left[\left(\frac{k\pi}{2a}\right)^2 + \frac{1}{L^2}\right]} R_k(z) = \frac{a\,S}{D}\sum \frac{R_k(z_0)}{\left[\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{L}\right)^2\right]} R_k(z)$$

Il modello Scurti-Varone, come sappiamo, è senz'altro valido per sorgente nella mezzeria, vale dire $z_0 = a$, e in tal caso porge:

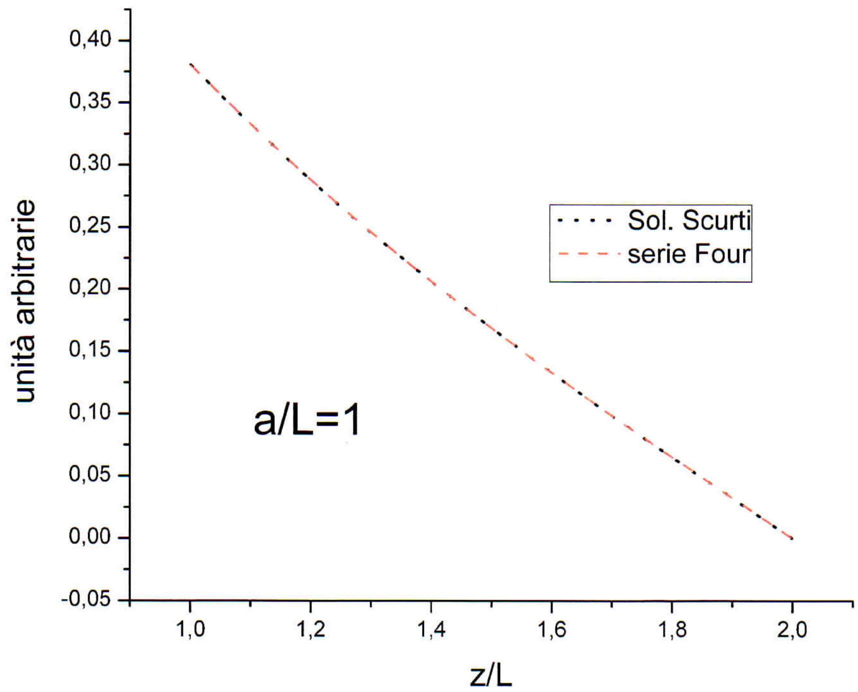
$$\Phi(z) = \frac{S\,L}{2\,D}\frac{e^{\frac{a}{L}}}{1+e^{-2\frac{a}{L}}}\left[e^{-\frac{z}{L}} - e^{-4\frac{a}{L}}\,e^{\frac{z}{L}}\right]$$

Vogliamo confrontare i due risultati per questo caso. Per comodità confronteremo quantità ridotte:

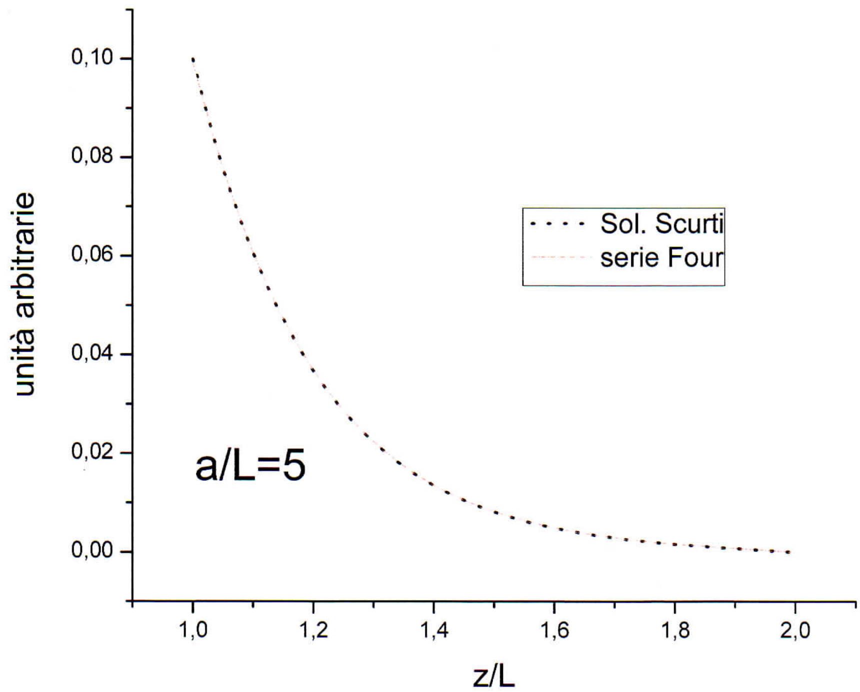
$$\begin{cases} \text{modello S.-V.:} & \dfrac{D}{aS}\Phi(z) = \dfrac{1}{2\frac{a}{L}}\dfrac{e^{\frac{a}{L}}}{1+e^{-2\frac{a}{L}}}\left[e^{-\frac{z}{L}} - e^{-4\frac{a}{L}}\,e^{\frac{z}{L}}\right] \\[2ex] \text{serie di Fourier:} & \dfrac{D}{aS}\Phi(z) = \displaystyle\sum_k \dfrac{R_k(a)}{\left[\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{L}\right)^2\right]} R_k(z) \end{cases}$$

Di seguito vediamo i grafici delle due funzioni per $a = L$ e per $a = 5L$

Si vede che i due risultati sono assolutamente identici (alla 6-7ma cifra decimale, cioè la precisione della macchina).



0,40
0,35
0,30
0,25
0,20
0,15
0,10
0,05
0,00
-0,05
unità arbitrarie
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0
z/L
Sol. Scurti
serie Four
a/L=1



0,10
0,08
0,06
0,04
0,02
0,00
unità arbitrarie
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0
z/L
Sol. Scurti
serie Four
a/L=5