BREVI RICHIAMI DI MATEMATICA

1. Gli autovalori

Consideriamo l'ODE seguente:

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2}+\alpha^2\Psi(x)=0 \qquad \Psi(0)=0; \quad \Psi(a)=0$$

Sappiamo di poter scrivere la soluzione generale come

$$\Psi(x)=A\text{sen}\alpha x+B\cos\alpha x$$

Proviamo ora ad introdurre le BC. Cominciamo da $\Psi(0)=0$:

$$\Psi(0)=A\text{sen}0+B\cos 0=B=0 \quad \Rightarrow \quad \Psi(x)=A\text{sen}\alpha x$$

Vediamo ora $\Psi(a)=0$

$$\Psi(a)=A\text{sen}\alpha a=0$$

Dunque: $\boxed{\text{se } \alpha a=n\pi}$ la condizione vale per qualunque A (e non ci serve quindi per determinare quest'ultimo); $\boxed{\text{se invece } \alpha a\neq n\pi}$ vi è un'unica determinazione, e cioè $A=0$, che dà pertanto la soluzione

$$\Psi(x)\equiv 0$$

Questa soluzione è perfettamente valida dal punto di vista matematico (risolve la ODE e soddisfa le BC): spesso però non ha interesse fisico. Ritorniamo al caso $\alpha a=n\pi$: in questo caso, come detto, non abbiamo modo di determinare A dalle BC date, quindi ci vorrà una qualche altra condizione. Comunque, la soluzione diviene:

$$\Psi(x)=A\text{sen}\frac{n\pi x}{a}$$

Dunque:

- per il problema dato esiste sempre la soluzione $\Psi(x)\equiv 0$ (la cosiddetta "soluzione banale");
- per particolari valori del parametro α esistono anche soluzioni non banali: i suddetti particolari valori del parametro sono detti AUTOVALORI;

- ad ogni autovalore corrisponde una soluzione: all'autovalore $\alpha_n = \frac{n\pi}{a}$ corrisponde la soluzione $\Psi_n(x) \equiv A\mathrm{sen}\alpha_n x = A\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{a}$. Tale soluzione è detta AUTOFUNZIONE corrispondente all'autovalore dato.

Un altro caso interessante è quello in cui non si conosce α, bensì esso è una costante da determinare. In questo caso il discorso si ribalta: nel caso precedente occorreva vedere quanto valeva α; se non corrispondeva a nessun autovalore allora l'unica soluzione era la soluzione banale; se corrispondeva ad un autovalore, allora la soluzione era l'autofunzione corrispondente a quell'autovalore. Nel presente caso (in cui α non è dato, e quindi non so quanto vale e sono io a doverlo determinare dalle BC) vedo che le BC mi dicono: α appartiene all'insieme degli autovalori (un insieme numerabile nel caso in esame). Quale autovalore scelgo? A questo punto osservo che:

- l'ODE è lineare e omogenea, e quindi una combinazione lineare di soluzioni è ancora una soluzione;
- ogni autofunzione è una soluzione;

Quindi la soluzione più generale è la combinazione lineare di *tutte* le autofunzioni:

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{sen}\frac{n\pi x}{a}$$

La famosa altra condizione che avevamo invocato per determinare A, in questo caso dovrà servire per determinare tutte le A_n.

2. La soluzione delle PDE per separazione di variabili

Si abbia una PDE, ad esempio

$$\frac{\partial^2\Psi(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\Psi(x,y)}{\partial y^2} \qquad + \ \mathrm{BC}$$

Come si sa, se il problema è ben posto (= tutti i problemi fisici) il teorema di esistenza e unicità mi assicura che la soluzione esiste ed è unica: quindi se trovo in qualunque maniera una soluzione (che soddisfa PDE e BC) questa è, appunto, l'unica soluzione di cui sopra. Posso quindi sempre tentare di risolvere la PDE con la posizione seguente:

$$\Psi(x,y) = X(x) \times Y(y)$$

Introduco questa relazione nella PDE iniziale, e trovo

$$Y(y)\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = X(x)\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}$$

e dividendo ancora tutto per $\Psi(x,y) = X(x) \times Y(y)$ trovo

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}$$

Ora mi ritrovo con un'equazione in cui

- il primo membro dipende al più da x (non può dipendere da y)
- viceversa il secondo membro dipende al più da y (e non può dipendere da x)
- i due membri però devono essere uguali (è, appunto, un'equazione)

L'unico modo di rispettare queste tre condizioni è che il valore comune dei due membri non dipenda né da x né da y, cioè sia un costante, diciamo C

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = C$$

Questa costante è detta costante di separazione. Non ne conosciamo il valore, però sappiamo che è costante, e possiamo quindi risolvere le 2 ODE che conseguono:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = C$$

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = C$$

Sperabilmente le BC ci consentiranno poi di determinare C in una qualche maniera.

3. Funzioni ortogonali

Si consideri un intervallo [a,b] (eventualmente infinito) e si abbiano delle funzioni tutte definite su tale intervallo. Si dice che le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono ORTOGONALI sull'intervallo [a,b] se

$$\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx = 0$$

dove con la linea sopra la funzione $g(x)$ si intende il complesso coniugato. D'ora in poi considereremo funzioni reali, che sono coniugate di se stesse, e non riporteremo più la linea L'integrale in questione viene detto prodotto scalare e spesso scritto con la seguente notazione $< f(x) | g(x) >$.

Naturalmente, posso avere un insieme di funzioni tutte ortogonali l'una all'altra, in tal caso si parla di un SISTEMA DI FUNZIONI ORTOGONALI sull'intervallo [a,b].

Può verificarsi il caso in cui, dato un sistema di funzioni ortogonali, non esista nessuna ulteriore funzione che sia ortogonale sull'intervallo [a,b] a tutte le funzioni del sistema. In tal caso il sistema si dice COMPLETO. È chiaro il perché: è completo perché contiene *tutte* le funzioni ortogonali tra di loro sull'intervallo considerato.

Può darsi il caso in cui il prodotto scalare di una funzione con se stessa abbia come risultato 1, e questo valga per tutte le funzioni del sistema: in tal caso si parla di sistema ORTONORMALE.

Naturalmente possiamo avere un sistema per cui valgano entrambe le ultime due proprietà: questo sarà quindi un SISTEMA ORTONORMALE COMPLETO.

Ricapitolando: sia dato un insieme $\Im$ di funzioni $f_i(x)$ tutte di classe L_2 (cioè di quadrato integrabile) sull'intervallo [a,b] (N.B.: non ci interessa il loro comportamento al di fuori dell'intervallo di interesse). Allora possiamo scrivere la tabella seguente:

Se $\forall\, f_i(x), f_j(x) \in \Im \quad \forall\, g(x) \notin \Im$	$\Im$ costituisce su [a,b] un sistema
$< f_i(x) \| f_j(x) >= \int_a^b f_i(x) f_j(x) dx = 0 \quad \text{se} \quad i \neq j$	ORTOGONALE
$\int_a^b f_i(x) f_j(x) dx = \delta_{i,j}$ [1]	ORTONORMALE
$\int_a^b f_i(x) f_j(x) dx = 0 \;\text{per}\; i \neq j;\;\; \exists\, f_i(x) \ni \int_a^b f_i(x) g(x) dx \neq 0$	ORTOGONALE COMPLETO
$\int_a^b f_i(x) f_j(x) dx = \delta_{i,j};\;\; \exists\, f_i(x) \ni \int_a^b f_i(x) g(x) dx \neq 0$	ORTONORMALE COMPLETO

[1] $\delta_{i,j}$ è la delta di Kronecker, che vale 1 se i=j, 0 se i≠j. È in un certo senso la versione discreta di quello che la delta di dirac $\delta(x)$ è per il caso continuo.

Consideriamo ora un sistema ortonormale $\Im$. Possiamo pensare di sviluppare una generica funzione $g(x)$ in serie delle funzioni di $\Im$:

$$g(x) = \sum_{f_i \in \Im} c_i f_i(x)$$

Per trovare le costanti c_i possiamo pensare di fare il prodotto scalare di $g(x)$ con la generica funzione $f_j(x) \in \Im$

$$< g(x) | f_j(x) >=< \sum_{f_i \in \Im} c_i f_i(x) | f_j(x) >= \sum_{f_i \in \Im} c_i < f_i(x) | f_j(x) > = \sum_{f_i \in \Im} c_i \delta_{i,j} = c_j$$

vale a dire che possiamo trovare facilissimamente le c_i come prodotti scalari:

$$c_i =< g(x) | f_i(x) >= \int_a^b g(x) f_i(x) dx$$

basta saper fare l'integrale.

E se il sistema è soltanto ortogonale? In tal caso troviamo

$$< g(x) | f_j(x) >= \sum_{f_i \in \Im} c_i < f_i(x) | f_j(x) > = c_j < f_j(x) | f_j(x) >$$

e quindi abbiamo

$$c_i = \frac{< g(x) | f_i(x) >}{< f_i(x) | f_i(x) >}$$

Vediamo un esempio: consideriamo l'intervallo [0,a] e le funzioni

$$f_n(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}$$

È presto visto che sono ortogonali: infatti:

$$\int_0^a \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} dx = \frac{a}{2} \delta_{n,m}$$

Proviamo a sviluppare in serie di tali funzioni la funzione $g(x)$ definita come segue (dove B è una costante)

$$g(x) = B \qquad x \in [0, a]$$

scriveremo quindi

$$g(x) = \sum_{f_i \in \Im} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}$$

con le costanti c_n date dalla relazione

$$c_n = \frac{< g(x) | f_n(x) >}{< f_n(x) | f_n(x) >} = \frac{2}{a} B \int_0^a \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} dx = \frac{2B}{n\pi}[1 - \cos(n\pi)] = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad n \, \text{pari} \\ \dfrac{2B}{n\pi} & \text{per} \quad n \, \text{dispari} \end{cases}$$

Troviamo infine la serie

$$g(x) = \frac{2B}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{a}$$

proviamo con la funzione

$$g(x) = \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{a} \qquad x \in [0, a]$$

Qui è particolarmente facile. Infatti:

$$c_n = \frac{< g(x) | f_n(x) >}{< f_n(x) | f_n(x) >} = \frac{2}{a} \int_0^a \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} dx = \frac{2}{a} \frac{a}{2} \delta_{2,n} = \delta_{2,n}$$

Vale a dire: $c_2 = 1$, mentre $c_n = 0 \ \ \forall n \neq 2$.

Potete provare, per esercizio, a sviluppare la funzione $g(x)$

$$g(x) = \cos \frac{m\pi x}{a} \qquad x \in [0, a]$$