Equazione di Fokker-Planck

(1)

§1 Introduzione

In molti sistemi dinamici le forze d'interazione fra le particelle costituenti il sistema decrescono lentamente con la distanza. Basti pensare, per esempio, alle interazioni fra particelle cariche, o fra corpi celesti, che sono governate da forze proporzionali all'inverso del quadrato della distanza delle particelle, o dei corpi, che interagiscono. Per questi sistemi, gli urti distanti con piccoli angoli di deflessione possono essere molto più frequenti e importanti degli urti vicini con grandi angoli di deflessione. Questo permette di semplificare notevolmente il termine di collisione dell'equazione cinetica per la funzione di distribuzione semplice f. Focalizziamo la nostra attenzione su di un sistema costituito da particelle cariche (per esempio un plasma completamente ionizzato) e consideriamo le 3 lunghezze caratteristiche

r_0 = parametro d'urto per una deflessione di 90° $\left(\chi = \frac{\pi}{2}\right)$

$= n^{-\frac{1}{3}} =$ distanza media fra le particelle (n = densità delle particelle)

r_D = raggio di Debye.

Ricordiamo che il raggio di Debye, detto anche "lunghezza di schermaggio Coulombiano", rappresenta la distanza limite fra 2 particelle oltre la quale l'interazione Coulombiana può essere trascurata per l'effetto di schermaggio elettrostatico prodotto dalle altre particelle cariche. In altre parole, una particella carica interagisce singolarmente, anche se simultaneamente, con effetti non trascurabili sulla sua traiettoria, solo con le particelle la cui distanza da essa è $\leq L_D$. Le particelle situate fuori dalla sfera di raggio uguale a L_D (detta sfera di Debye), avente il centro coincidente con la particella "test" considerata, non urtano singolarmente con la particella test, ma possono interagire con essa solo attraverso collisioni collettive (od organizzate). Abbiamo visto che questi moti collettivi danno origine al "campo di carica spaziale" e sono, pertanto, i responsabili delle interazioni fra le particelle come descritte nell'equazione di Vlasov. Viceversa, i fenomeni che sorgono da interazioni con le particelle contenute nella sfera di Debye debbono essere analizzati in termini di urti singoli che, tuttavia, possono aver luogo simultaneamente. Mentre, però, per i singoli urti binari fra 2 particelle il termine di collisione è descritto dall'integrale di collisione di Boltzmann, rimane aperto il problema delle interazioni binarie simultanee fra la particella test e le altre particelle contenute nella sfera di Debye. Il termine di collisione di Fokker-Planck risolve questo problema, se si verifica l'eventualità, sopra riportata, del prevalere degli urti con piccole deflessioni sulle collisioni con piccolo parametro d'urto (che sono essenzialmente singoli incontri binari).

Per concretizzare un po' meglio quanto abbiamo detto, riferiamoci alle 3 lunghezze caratteristiche introdotte precedentemente, b_0, d, L_D, e suddividiamo i vari tipi di urti e deflessioni confrontando il parametro d'urto, b, con queste 3 lunghezze. Si possono verificare le seguenti 3 relazioni:

1°) $0 \leq b \leq$ alcuni b_0 $\Rightarrow$ deflessioni con grandi angoli;

2°) alcuni $b_0 \leq b \leq d$ $\Rightarrow$ principalmente urti binari con piccoli angoli di deflessione;

3°) $d \leq b \leq L_D$ $\Rightarrow$ interazioni multiple simultanee; la somma delle forze sulla particella test è generalmente piccola e varia molto rapidamente.

Se le situazioni descritte dai punti 2° e 3° sono molto più frequenti di quella del punto 1°, la particella test compirà molte piccole deflessioni, descrivendo una traiettoria con piccoli angoli, e solo raramente avverranno deflessioni con grandi angoli ($\gtrsim 90°$).

Sotto queste ipotesi la variazione di velocità $\Delta\vec{v}$ in un urto (o durante l'intervallo di tempo Δt sufficientemente piccolo) è una quantità piccola che ci consente di eseguire uno sviluppo in serie e ricavare quindi l'equazione di Fokker-Planck.

2 L'equazione di Fokker-Planck

Le 3 ipotesi fondamentali che sono alla base della determinazione del termine di collisione di Fokker-Planck sono: 1°) che il processo sia Markoviano(*); 2°) che gli urti siano elastici; 3°) che gli urti del tipo 2° e 3° del paragrafo precedente siano preponderanti.

(*) Nell'ambito della teoria della probabilità, un processo stocastico è detto essere un "processo Makoviano" se l'evolusione di tale processo avviene in modo che ciò che accadrà nel futuro dipende solo dal presente, ma non dagli stati passati del sistema. Più precisamente, consideriamo il susseguirsi di 3 eventi a, b, c; la probabilità della successione di questi eventi può essere espressa in termini della probabilità del verificarsi dell'evento a e della probabilità di transizione $a \to b$, $b \to c$. Se ciascuna delle probabilità di transizione dipende solo dai 2 stati che sono interessati nella transizione, ma non dalla storia precedente, una tale successione di eventi è detta costituire un processo (o una catena) Markoviano.

Supponiamo che le particelle di un sistema omogeneo, privo di forze esterne, percorra un cammino (una traiettoria) "casuale", simile al moto Browniano, come risultato di un gran numero di piccole deflessioni. Un tale processo "stocastico" può essere descritto ricorrendo alla funzione probabilità di transizione,

$P(\vec{v}, \Delta\vec{v})$, definita come la probabilità che ~~nel temp~~ nell'intervallo di tempo Δt una particella con velocità $\vec{v}$ abbia un incremento di velocità pari a $\Delta\vec{v}$.
Supponiamo che la funzione probabilità $P(\vec{v}, \Delta\vec{v})$ non dipenda esplicitamente dal tempo; in altre parole supponiamo che la funzione di distribuzione delle particelle, f, si evolva indipendentemente dalla sua storia, indipendentemente cioè dai valori che la f ha assunto precedentemente. Il cammino casuale delle particelle del sistema costituisce quindi un processo Markoviano.
La funzione di distribuzione al tempo t è, perciò, data da:

$$f(\vec{v}, t) = \int f(\vec{v} - \Delta\vec{v}, t - \Delta t)\, P(\vec{v} - \Delta\vec{v}, \Delta\vec{v})\, d(\Delta\vec{v}) \qquad (1)$$

sviluppiamo la funzione integranda che compare nell'equazione 1 in serie di Taylor; otteniamo:

$$f(\vec{v}-\Delta\vec{v}, t-\Delta t)\, P(\vec{v}-\Delta\vec{v}, \Delta\vec{v}) = f(\vec{v}, t)\, P(\vec{v}, \Delta\vec{v}) - \Delta t\, P(\vec{v}, \Delta\vec{v}) \frac{\partial f}{\partial t} +$$

$$- \Delta\vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}}(f P) + \frac{1}{2} \Delta\vec{v}\Delta\vec{v} : \frac{\partial^2}{\partial\vec{v}\partial\vec{v}}(f P) + \cdots\cdots \quad (2)$$

Se ricordiamo che per la definizione ~~della~~ di funzione di probabilità deve essere:

$$\int P(\vec{v}, \Delta\vec{v})\, d(\Delta\vec{v}) = 1\,, \quad (3)$$

e introduciamo lo sviluppo di equazione 2 nella 1, trascurando i termini di ordine superiore, non riportati nella 2, data la supposta piccola variazione di $\Delta\vec{v}$, otteniamo

$$f(\vec{v}, t) = \int \Big\{ f(\vec{v}, t)\, P(\vec{v}, \Delta\vec{v}) - \Delta t\, P(\vec{v}, \Delta\vec{v}) \frac{\partial f(\vec{v}, t)}{\partial t} - \Delta\vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial\vec{v}} [f(\vec{v}, t)\, P(\vec{v}, \Delta\vec{v})] +$$

$$+ \frac{1}{2} \Delta\vec{v}\Delta\vec{v} : \frac{\partial^2}{\partial\vec{v}\partial\vec{v}} [f(\vec{v}, t)\, P(\vec{v}, \Delta\vec{v})] \Big\}\, d(\Delta\vec{v})\,, \quad (4)$$

da cui

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f(\vec{v}, t) - f(\vec{v}, t-\Delta t)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{1}{\Delta t} \int \Big\{ -\Delta\vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial\vec{v}}(f P) + \frac{1}{2} \Delta\vec{v}\Delta\vec{v} : \frac{\partial^2}{\partial\vec{v}\partial\vec{v}}(f P) \Big\}\, d(\Delta\vec{v})\,. \quad (5)$$

rapporto $\frac{f(\vec{v},t)-f(\vec{v},t-\Delta t)}{\Delta t}$ deve essere inteso nel senso del

mite per $\Delta t \to 0$). Notiamo che le variazioni di f, per le otesi fatte di omogeneità del sistema e di assenza di ze esterne, ~~è~~ sono dovut~~e~~ solo agli effetti degli urti e, quindi, $= \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll}$. Se indichiamo con

$$\langle \Delta\vec{v} \rangle = \frac{1}{\Delta t}\int P(\vec{v},\Delta\vec{v})\,\Delta\vec{v}\; d(\Delta\vec{v}), \qquad (6,a)$$

$$\langle \Delta\vec{v}\Delta\vec{v} \rangle = \frac{1}{\Delta t}\int P(\vec{v},\Delta\vec{v})\,\Delta\vec{v}\Delta\vec{v}\; d(\Delta\vec{v}), \qquad (6,b)$$

. (5) diviene

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} = \cancel{-\frac{\partial}{\partial\vec{v}}\cdot(f\langle\Delta\vec{v}\rangle)}$$
$$= -\frac{\partial}{\partial\vec{v}}\cdot\left(f\langle\Delta\vec{v}\rangle\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\vec{v}\partial\vec{v}}:\left(f\langle\Delta\vec{v}\Delta\vec{v}\rangle\right) \qquad (7)$$

termine di collisioni

. ~~xxx~~ è conosciuta come equazione di Fokker-Planck. quantità $\langle\Delta\vec{v}\rangle$ e $\langle\Delta\vec{v}\Delta\vec{v}\rangle$ sono chiamate coefficienti di (kker-Planck ed esprimono una media della variazione $\Delta\vec{v}$ e $\Delta\vec{v}\Delta\vec{v}$ come risultato di molte deboli interazioni. $\vec{v}\rangle$ è chiamato anche "coefficiente di frizione dinamica",

mentre $<\Delta\vec{v}\Delta\vec{v}>$ prende il nome di "tensore di diffusione (8)
nello spazio delle velocità". Per poter usare il termine di collisione 7 è necessario calcolare questi coefficienti; è quindi necessario conoscere la funzione probabilità di transizione $P(\vec{v},\Delta\vec{v})$. L'esatta valutazione esplicita di $P(\vec{v},\Delta\vec{v})$ richiede la conoscenza del comportamento dinamico delle particelle interagenti, che costituisce un problema spesso assai complicato. In alcuni casi, tuttavia, è possibile, come vedremo nel paragrafo seguente, ricorrere all'integrale di collisione di Boltzmann per il calcolo di $<\Delta\vec{v}>$ e $<\Delta\vec{v}\Delta\vec{v}>$, ed utilizzare quindi il termine di collisione 7.

§3 Derivazione dell'equazione di Fokker-Planck dall'equazione di Boltzmann

È interessante verificare quale relazione esiste fra l'equazione di Boltzmann e l'equazione di Fokker-Planck, al fine anche della valutazione dei coefficienti $<\Delta\vec{v}>$ e $<\Delta\vec{v}\Delta\vec{v}>$.
Condizione di validità dell'integrale di collisione di Boltzmann è che l'effetto degli urti binari sia preponderante rispetto alle collisioni multiple. Questo si verifica se le interazioni

l tipo 1° e 2° del paragrafo 1 sono quelle di maggior
portanza per l'evoluzione della funzione f. In
esto caso possiamo usare l'equazione di Boltzmann;
inoltre solo quelli di tipo 2° sono determinanti,
ichè molto più frequenti, per l'andamento in spazio,
mpo e velocità della distribuzione f (situazione che può
ccadere per certi valori dei parametri che caratterizzano
plasma) allora possiamo (utilizzare l'approssimazione di Fokker-Planck e) usare l'integrale di collisione
Boltzmann per calcolare i coefficienti di Fokker-Planck.
Ho queste condizioni, le interazioni fra particelle possono
sere considerate una serie di collisioni binarie con parame-
i d'urto grande e, quindi, con piccoli angoli di deflessione.
tiamo, perciò, dall'integrale di collisione di Boltzmann

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} = \int (f' f'_B - f f_B)\, g\, \sigma(\chi)\, d\vec{\omega}\, d\vec{v}_B \quad , \qquad (8)$$

dimostriamone una importante proprietà; ~~e~~ precisamente che

$$\int A(\vec{v}) \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} d\vec{v} = \int (A' - A)\, f f_B\, g\, \sigma(\chi)\, d\vec{\omega}\, d\vec{v}_B\, d\vec{v}, \qquad (9)$$

ove $A(\vec{v})$ è una arbitraria funzione della velocità $\left(A' \equiv A(\vec{v}')\right)$.

Moltiplichiamo la (8) per $A(\vec{v})$ e integriamo rispetto a $\vec{v}$,

$$\int A(\vec{v})\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} d\vec{v} = \int A(\vec{v})\left(f'f'_B - ff_B\right) g\,\sigma(\chi)\, d\vec{\omega}\, d\vec{v}_B\, d\vec{v} = \tag{10}$$

$$= \int A(\vec{v}) f' f'_B\, g\,\sigma(\chi)\, d\vec{\omega}\, d\vec{v}_B\, d\vec{v} - \int A(\vec{v}) f f_B\, g\,\sigma(\chi)\, d\vec{\omega}\, d\vec{v}_B\, d\vec{v}.$$

Il primo termine della parte destra della 10 può anche essere così scritto:

$$\int A(\vec{v}) f' f'_B\, g\,\sigma(\chi)\, d\vec{\omega}\, d\vec{v}_B\, d\vec{v} = \int A(\vec{v}') f f_B\, g'\,\sigma(\chi)\, d\vec{\omega}\, d\vec{v}'_B\, d\vec{v}' = \tag{11}$$

$$= \int A(\vec{v}') f f_B\, g\,\sigma(\chi)\, d\vec{\omega}\, d\vec{v}_B\, d\vec{v},$$

se ricordiamo che $g = g'$ e $d\vec{v}\, d\vec{v}_B = d\vec{v}'\, d\vec{v}'_B$. La 10 diviene:

$$\int A(\vec{v})\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} d\vec{v} = \int A' f f_B\, g\,\sigma(\chi)\, d\vec{\omega}\, d\vec{v}_B\, d\vec{v} - \int A f f_B\, g\,\sigma(\chi)\, d\vec{\omega}\, d\vec{v}_B\, d\vec{v} = \tag{12}$$

$$= \int (A' - A) f f_B\, g\,\sigma(\chi)\, d\vec{\omega}\, d\vec{v}_B\, d\vec{v},$$

che dimostra la proprietà 9. In conformità alle ipotesi fatte, le collisioni binarie producono solo un piccolo cambiamento della velocità, $\Delta\vec{v}$; cioè

$$\vec{v}' = \vec{v} + \Delta\vec{v} \tag{13}$$

con $\Delta\vec{v}$ piccolo.

La funzione arbitraria $A(\vec{v}') = A(\vec{v} + \Delta\vec{v})$ può, quindi, essere sviluppata in serie di Taylor troncando lo sviluppo dopo i primi due termini:

$$A(\vec{v}+\Delta\vec{v}) = A(\vec{v}) + \Delta\vec{v}\cdot\frac{\partial A(\vec{v})}{\partial\vec{v}} + \frac{1}{2}\Delta\vec{v}\Delta\vec{v} : \frac{\partial^2 A(\vec{v})}{\partial\vec{v}\,\partial\vec{v}} . \qquad (14)$$

Sostituiamo lo sviluppo (14) nella 9; otteniamo

$$\int A(\vec{v})\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} d\vec{v} = \int\left(\Delta\vec{v}\cdot\frac{\partial A(\vec{v})}{\partial\vec{v}} + \frac{1}{2}\Delta\vec{v}\Delta\vec{v} : \frac{\partial^2 A(\vec{v})}{\partial\vec{v}\,\partial\vec{v}}\right) f f_B\, g\, \sigma(\chi)\, d\vec{\omega}\, d\vec{v}_B\, d\vec{v} . \qquad (15)$$

Consideriamo separatamente gli integrali della parte destra della 15. Integrando per parti otteniamo

$$\int \Delta\vec{v}\cdot\frac{\partial A(\vec{v})}{\partial\vec{v}} f f_B\, g\, \sigma(\chi)\, d\vec{\omega}\, d\vec{v}_B\, d\vec{v} = \int\left[f_B\,\sigma(\chi)\int\Delta\vec{v}\cdot\frac{\partial A(\vec{v})}{\partial\vec{v}} f g\, d\vec{v}\right] d\vec{\omega}\, d\vec{v}_B =$$

$$= -\int A(\vec{v})\frac{\partial}{\partial\vec{v}}\cdot\left(\Delta\vec{v} f g\right) f_B\,\sigma(\chi)\, d\vec{\omega}\, d\vec{v}_B\, d\vec{v} ; \qquad (16)$$

e

$$\int\frac{1}{2}\Delta\vec{v}\Delta\vec{v} : \frac{\partial^2 A(\vec{v})}{\partial\vec{v}\,\partial\vec{v}} f f_B\, g\, \sigma(\chi)\, d\vec{\omega}\, d\vec{v}_B\, d\vec{v} = \int\frac{1}{2}A(\vec{v})\frac{\partial^2}{\partial\vec{v}\,\partial\vec{v}} : \left(\Delta\vec{v}\Delta\vec{v} f g\right) f_B\,\sigma(\chi)\, d\vec{\omega}\, d\vec{v}_B\, d\vec{v} \qquad (17)$$

La (15) diviene

$$\int A(\vec{v})\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} d\vec{v} = -\int A(\vec{v})\frac{\partial}{\partial \vec{v}}\cdot(\Delta\vec{v} f g) f_B \sigma(\chi) d\vec{\omega}\, d\vec{v}_B\, d\vec{v} +$$

$$+\int \frac{1}{2} A(\vec{v})\frac{\partial^2}{\partial\vec{v}\partial\vec{v}} : (\Delta\vec{v}\Delta\vec{v} f g) f_B \sigma(\chi)\, d\vec{\omega}\, d\vec{v}_B\, d\vec{v} =$$

$$= -\int A(\vec{v})\left[\frac{\partial}{\partial\vec{v}}\cdot\left(f\int \Delta\vec{v}\, g\, \sigma(\chi) f_B\, d\vec{\omega}\, d\vec{v}_B\right)\right] d\vec{v} + \qquad (18)$$

$$+\int A(\vec{v})\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\vec{v}\partial\vec{v}} : \left(f\int \Delta\vec{v}\Delta\vec{v}\, g\, \sigma(\chi) f_B\, d\vec{\omega}\, d\vec{v}_B\right)\right] d\vec{v}.$$

Definiamo le quantità

$$\langle\Delta\vec{v}\rangle = \int \Delta\vec{v}\, g\, \sigma(\chi) f_B\, d\vec{\omega}\, d\vec{v}_B \qquad (19,a)$$

$$\langle\Delta\vec{v}\Delta\vec{v}\rangle = \int \Delta\vec{v}\Delta\vec{v}\, g\, \sigma(\chi) f_B\, d\vec{\omega}\, d\vec{v}_B, \qquad (19,b)$$

che sono medie modificate (sulla funzione di distribuzione della velocità f_B e sulla funzione di distribuzione angolare, $\sigma(\chi)$) del cambiamento di velocità delle particelle. La 18 diviene

$$\int A(\vec{v})\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} d\vec{v} = \int A(\vec{v})\left[-\frac{\partial}{\partial\vec{v}}\cdot\left(f\langle\Delta\vec{v}\rangle\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\vec{v}\partial\vec{v}} : \left(f\langle\Delta\vec{v}\Delta\vec{v}\rangle\right)\right] d\vec{v} \qquad (20)$$

'equazione 20 deve valere per qualsiasi funzione $A(\vec{v})$;

deve, perciò, essere ~~uguali le funzioni integrande della 20~~ verificata l'equazione:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} = -\frac{\partial}{\partial \vec{v}}\cdot\left(f<\Delta\vec{v}>\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\vec{v}\,\partial\vec{v}}:\left(f<\Delta\vec{v}\,\Delta\vec{v}>\right) \qquad (21)$$

e coincide con la 7. Le equazioni 19 definiscono quindi l coefficiente di frizione dinamica ed il tensore di diffusio-ne in termini della funzione di distribuzione angolare $\sigma(\chi)$.

ome esempio possiamo calcolare $<\Delta\vec{v}>$ nel caso di elettroni he diffondono urtando contro degli ioni di carica Ze, trascuran-o gli urti elettroni-elettroni. Definiamo, a questo fine, le quantità

$$\{\Delta\vec{v}\} = \int \Delta\vec{v}\, g\, \sigma(\chi)\, d\vec{\omega} \qquad (22, a)$$

$$\{\Delta\vec{v}\,\Delta\vec{v}\} = \int \Delta\vec{v}\,\Delta\vec{v}\, g\, \sigma(\chi)\, d\vec{\omega} \qquad (22, b)$$

tali che

$$<\Delta\vec{v}> = \int \{\Delta\vec{v}\} f_B\, d\vec{v}_B \qquad (23, a)$$

e

$$<\Delta\vec{v}\,\Delta\vec{v}> = \int \{\Delta\vec{v}\,\Delta\vec{v}\} f_B\, d\vec{v}_B \qquad (23, b)$$

Ricordando che durante lo studio della dinamica degli urti binari abbiamo ottenuto

$$\vec{v}' - \vec{v} = \Delta \vec{v} = \frac{M}{M+m} \left(\vec{g}' - \vec{g} \right), \qquad (24)$$

dove M e m sono la massa degli ioni e degli elettroni rispettivamente e $\vec{g}$ e $\vec{g}'$ sono le velocità relative delle particelle interagenti prima e dopo l'urto, ricaviamo per le tre componenti di $\Delta \vec{v}$

$$\Delta v_x = \frac{M}{M+m}\, g \operatorname{sen} \chi \cos \varphi \qquad (25,a)$$

$$\Delta v_y = \frac{M}{M+m}\, g \operatorname{sen} \chi \operatorname{sen} \varphi \qquad (25,b)$$

$$\Delta v_z = \frac{M}{M+m}\, g \left(1 - \cos \chi\right), \qquad (25,c)$$

se ci riferiamo ad un sistema cartesiano ortogonale con l'asse delle z ~~[illegible]~~ orientato secondo la direzione di $\vec{g}$ e eseguiamo il calcolo nel sistema di riferimento C.M. ~~con l'origine coincidente con il punto di [illegible] del vettore $\vec{g}$~~

Introduciamo ora le 25 e la funzione di distribuzione angolare per interazioni Coulombiane

$$\sigma(\chi) = \frac{b_0^2}{(1-\cos\chi)^2} \qquad (26)$$

nella 22,a; otteniamo

$$\{\Delta v_x\} = \{\Delta v_y\} = 0 \qquad (27)$$

e

$$\{\Delta v_z\} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{M}{M+m} g^2 b_0^2 \frac{\operatorname{sen}\chi}{1-\cos\chi}\, d\chi\, d\varphi . \qquad (28)$$

l'integrale 28 diverge, dato che l'urto fra 2 particelle cariche avviene anche con parametro d'urto molto grande $(=\infty)$ a cui corrisponde un angolo di diffusione $\chi = 0$. Tuttavia, poiché le particelle separate da una distanza maggiore di L_D praticamente non interagiscono singolarmente, per effetto dello schermaggio prodotto dalle altre particelle cariche, possiamo sostituire il limite inferiore $(=0)$ nell'integrazione rispetto a χ con l'angolo di diffusione che corrisponde ad un parametro d'urto uguale a L_D. Si ottiene pertanto

$\ln(1+\Lambda^2)$ ma $\Lambda \gg 1$

$$\{\Delta v_z\} = \frac{M}{M+m} \frac{Z^2 e^4 \ln\Lambda}{4\pi\varepsilon_0 m_c^2 g^2} \qquad (29)$$

dove m_c è la massa ridotta e $\Lambda = \frac{L_D}{b_0}$.

Per il calcolo di $\langle \Delta \vec{v} \rangle$, equazione 23,a, facciamo l'ipotesi, per motivi di semplicità, che gli ioni possano essere considerati fermi, così che si possa porre ($M \gg m$ e C.M. [illegible] con il sistema del [illegible])

$$f_B = N\,\delta(\vec{v}_B) \qquad (30)$$

dove $\delta(\vec{v}_B)$ è la funzione delta di Dirac. Otteniamo

$$\langle \Delta v_z \rangle = N \{\Delta v_z\} \qquad (31)$$

$$\chi(b,g) = \pi - 2b \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2\left(1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2\phi(r)}{m_c g^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad (1)$$

~~Poten.~~ Energ. potenz. $\phi(r)$ per interaz. Coulombiane $\phi(r) = \frac{q_A q_B}{4\pi\varepsilon_0 r}$

$$\chi(b,g) = \pi - 2b \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2\left(1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2 q_A q_B}{m_c g^2 4\pi\varepsilon_0 r}\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad (2)$$

Poniamo $b_0 = q_A q_B / 4\pi\varepsilon_0 m_c g^2$ e $u = \frac{1}{r}$

$$\chi(b,g) = \pi - 2b \int_0^{U} \frac{du}{\left(1 - 2b_0 u - b^2 u^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

dove U = valore di u che rende uguale a zero il denominatore

Se eseguiamo l'integrazione otteniamo

$$\chi(b,g) = 2\,\mathrm{sen}^{-1} \frac{b_0}{(b_0^2 + b^2)^{1/2}} \qquad (3)$$

da cui l'importante risultato

$$\tan\frac{\chi}{2} = \frac{b_0}{b} \qquad (4)$$

che mostra come b_0 = param. d'urto per $\chi = 90°$

(B)

$$\sigma(\chi) = \frac{b}{\operatorname{sen}\chi}\left|\frac{db}{d\chi}\right| \qquad (5)$$

Se deriviamo ambo i membri della (4) otteniamo

$$\frac{d\chi}{2\cos^2(\chi/2)} = -\frac{b_0}{b^2}\,db \qquad (6)$$

da cui

$$\left|\frac{db}{d\chi}\right| = \frac{b^2}{2b_0\cos^2(\chi/2)} \qquad (7)$$

che sostituita nella 5 dà

$$\sigma(\chi) = \frac{b^3}{2b_0\operatorname{sen}\chi\cos^2(\chi/2)} \qquad (8)$$

Se notiamo che la (4) si può scrivere come $b = b_0\cos(\chi/2)/\operatorname{sen}(\chi/2)$ e ~~notiamo~~ che $\operatorname{sen}\chi = 2\operatorname{sen}(\chi/2)\cos(\chi/2)$ otteniamo

$$\sigma(\chi) = \frac{b_0^2}{4\operatorname{sen}^4(\chi/2)} \quad = \text{formula di Rutherford}$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\chi}{2}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\chi}{2}\right) \\ \cos\chi = \cos^2\left(\frac{\chi}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\chi}{2}\right) \Rightarrow \cos^2\left(\frac{\chi}{2}\right) = \cos\chi + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\chi}{2}\right) \end{cases}$$

Poiché $\operatorname{sen}^2(\chi/2) = \frac{1}{2}(1 - \cos\chi)$

$$\sigma(\chi) = \frac{b_0^2}{(1-\cos\chi)^2}$$