Dispense di
Trasformate di Fourier

Prof. Jorge E. Fernandez

AA 2011/2012

Corso: Metodi Matematici per l'Energetica M

Trasformata di Fourier

Partendo dalla serie complessa di Fourier di una funzione $f(x)$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}}$$

con

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-\frac{2\pi i n x}{L}} dx$$

La somma può essere convertita in un'integrale come segue:

Definiamo

$$y = \frac{2\pi n}{L} \quad e \quad L a_n = g(y)$$

Sostituendo in $f(x)$ otteniamo

$$f(x) = \sum_n \frac{1}{L} e^{ixy} \underbrace{(L\, a_n)}_{g(y)} \underbrace{\Delta n}_{1} = \frac{1}{2\pi} \sum_{y_n} e^{ixy} g(y) \Delta y$$

L'ultima espressione rappresenta la discretizzazione dell'integrale

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} g(y) dy$$

Calcolando il limite $L \to \infty$ si ottiene per $g(y)$ la seguente espressione

$$L a_n = g(y) = \lim_{L\to\infty} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-ixy} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}\, g(y)\, dy} \qquad (1)$$

e

$$\boxed{g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ixy}\, dx} \leftarrow \text{Trasformata di Fourier di } f(x)$$

Nota

La costante 2π è abbastanza arbitraria.
Frequentemente si trova la trasformata e l'antitrasformata definite in modo simmetrico:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}\, g(y)\, dy \qquad (2)$$

e

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}\, f(x)\, dx$$

Combinando le espressioni (1) [o le (2) se si preferisce] si ottiene

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{ixy}\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\, e^{-ix'y}\, dx'$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, f(x') \boxed{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-x')y}\, dy}$$

funzione delta di Dirac
denotata come $\delta(x-x')$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, f(x')\, \delta(x-x')$$

Delta di Dirac

$\Rightarrow$ La funzione delta ha le seguenti proprietà

$$\delta(x) = 0 \qquad x \neq 0$$

$$\int_{-a}^{b} \delta(x)\, dx = 1 \qquad a, b > 0 \qquad (3)$$

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}\, dy \quad \text{(rappresentazione integrale)}$$

$$f(x')\, \delta(x-x') = f(x)\, \delta(x-x')$$

Formula di Parseval

Si può utilizzare la funzione delta per valutare l'importante integrale $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f^*(x)\, f(x)$$

ricorrendo alla definizione (1), otteniamo

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, g^*(y)\, e^{-ixy} \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(y')\, e^{ixy'} dy' \right)$$

raggruppando

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, g^*(y) \int_{-\infty}^{\infty} dy'\, g(y') \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{ix(y'-y)} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, g^*(y) \int_{-\infty}^{\infty} dy'\, g(y')\, \delta(y'-y)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, g^*(y)\, g(y)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)|^2\, dy \qquad (4)$$

Questo è il "Teorema di Parseval". E' utile per interpretare meglio ~~la funzione trasformata~~ il significato fisico della $g(y)$ quando si conosce la $f(x)$.

Trasformata di una funzione pari

Se $f(x)$ è una funzione pari, si ha $f(x) = f(-x)$

quindi

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ixy}\, dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} f(x)\, e^{-ixy}\, dx + \int_{-\infty}^{0} f(x)\, e^{-ixy}\, dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} f(x)\, e^{-ixy}\, dx + \int_{0}^{\infty} f(-x)\, e^{ixy}\, dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} f(x) \left(e^{ixy} + e^{-ixy}\right) dx$$

$$= 2\int_{0}^{\infty} f(x) \cos(xy)\, dx \qquad (5)$$

Analogamente, se $g(y)$ è pari, si ha

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} g(y) \cos(xy)\, dy$$

[dimostrare come compito]

$f(x)$ e $g(y)$ che solo devono essere definiti per x e y positivi vengono chiamati le trasformate coseno di Fourier.

Trasformate di una funzione dispari

In modo completamente simile, e possibile calcolare le trasformate seno di Fourier che vengono usate con la parte positiva di una funzione dispari ($f(-x) = -f(x)$)

$$f(x) = \frac{-1}{\pi i} \int_0^\infty g(y) \sin(xy)\, dy \qquad (6)$$

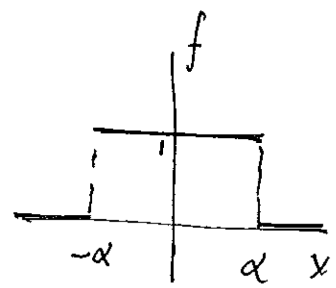
e

$$g(y) = -2i \int_0^\infty f(x) \sin(xy)\, dx$$

Trasformate di classi specifiche di funzioni

$f(x)$ é ~~pari~~	$g(y)$ é pari
$f(x)$ é reale e pari	$g(y)$ é reale e pari
$f(x)$ é immaginaria e pari	$g(y)$ é immaginaria e pari
$f(x)$ é dispari	$g(y)$ é dispari
$f(x)$ é reale e dispari	$g(y)$ é immaginaria e dispari
$f(x)$ é immaginaria e dispari	$g(y)$ é reale e dispari

Esercizio 1 Calcolare la trasformata di Fourier della funzione impulso rettangolare $P_\alpha(x)$, definita come



$$f(x) = P_\alpha(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \alpha \quad (-\alpha < x < \alpha) \\ 0, & \alpha < |x| \end{cases} \qquad (\alpha > 0)$$

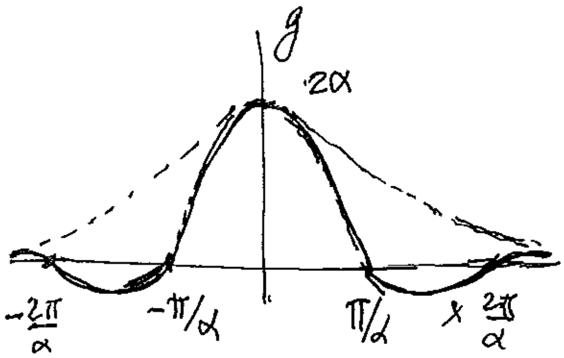
(a) Si applica eq. (1), direttamente

$$g(y) = \mathcal{F}[f(x)] =$$

$$= \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-ixy}\, dx$$

$$= \frac{1}{iy}\left[-e^{-ixy}\right]_{-\alpha}^{\alpha}$$

$$= \frac{1}{iy}\left(e^{i\alpha y} - e^{-i\alpha y}\right)$$



$$= \frac{2}{y}\sin(\alpha y)$$

(b) Essendo $f(x)$ pari, si applica direttamente (5)

$$g(y) = \mathcal{F}[f(x)]$$

$$= 2\int_0^{\alpha} \cos(xy)\, dx$$

$$= \frac{2}{y}\left[\sin(xy)\right]_0^{\alpha} = \frac{2}{y}\sin(\alpha y)$$

Trasformata di Fourier di una funzione reale

E' conveniente scomporre la funzione $f(x)$ nelle sue componenti pari $(+)$ e dispari $(-)$: $f(x) = f_+(x) + f_-(x)$

$$f_+(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) + f(-x)\right] \quad \text{(pari)}$$

$$f_-(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) - f(-x)\right] \quad \text{(dispari)}$$

Ipotizziamo che f è reale con trasformata

$$g(y) = R(y) + i\, I(y)$$

dove $R(y)$ e $I(y)$ denotano, rispettivamente, le parti reale ed immaginaria di $g(y)$.

Quindi, per la discussione precedente

$$g_+(y) = R(y) \quad \text{(reale pari} \to \text{reale)}$$

$$g_-(y) = i\, I(y) \quad \text{(reale dispari} \to \text{immaginaria)}$$

e $f_+(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[g_+(y)\right]_x = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty R(y)\cos(xy)\,dy$

[vedi eq.(5)] (7)

e $f_-(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[g_-(y)\right]_x = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty I(y)\sin(xy)\,dy$

[vedi eq.(6)]

Possiamo riscrivere $g(y)$ in termini della sua ampiezza ~~[illegible]~~ $A(y) = |g(y)|$ e della fase $\varphi(y)$

$$g(y) = A(y)\, e^{i\varphi(y)}$$

Ci serve calcolare

$$R(y)\cos(xy) - I(y)\sin(xy) =$$

$$= A(y)\cos(\varphi(y))\cos(xy) -$$

$$- A(y)\sin(\varphi(y))\sin(xy)$$

$$= A(y)\cos(xy + \varphi(y))$$

Quindi, finalmente

$$f(x) = f_+(x) + f_-(x)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dy\,\left[R(y)\cos(xy) - I(y)\sin(xy)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dy\, A(y)\cos(xy + \varphi(y))$$

$$\Longrightarrow \boxed{f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dy\, |g(y)|\cos(xy + \varphi(y))} \quad (8)$$

Esercizio 8 Calcolare gli integrali (10)

(a) $$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx$$

(b) $$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax)\,\sin(bx)\,dx}{x^2} \qquad (a, b > 0)$$

(a) Se si usa la formula di Parseval (eq. 4) sulla funzione impulso $f(x) = P_\alpha(x)$

si ha
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} dx = 2\alpha$$

Da eq. (4) (ed esercizio 1) segue che

$$2\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 4\,\frac{\sin^2 \alpha y}{y^2}\, dy$$

che per $\alpha = 1$, da

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 y}{y^2}\, dy = \pi$$

(b)

Proprietà della trasformata di Fourier

1_ Linearità

$$\mathcal{F}\left(\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)\right) = \alpha \mathcal{F}\left(f_1(x)\right) + \beta \mathcal{F}\left(f_2(x)\right)$$

$$= \alpha g_1(y) + \beta g_2(y) \qquad (9)$$

Dim

$$\mathcal{F}\left(\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)\right) = \quad (\text{per eq. } (1))$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ixy} \left(\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)\right) =$$

$$= \alpha \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ixy} f_1(x)}_{g_1(y)} + \beta \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ixy} f_2(x)}_{g_2(y)}$$

2_ Derivata

$$\mathcal{F}\left(\frac{df(x)}{dx}\right) = \quad (\text{per eq } (1))$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ixy} f'(x) = \quad \text{integrando per parti}$$

$$= \left[e^{-ixy} f(x)\right]_{-\infty}^{\infty} + iy \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ixy} f(x)$$

$$= i y\, g(y) = i y\, \mathcal{F}(f(x)) \qquad (10)$$

La formula della trasformata della derivata prima può essere estesa alla derivata n-esima

$$\mathcal{F}\left(\frac{d f^{(n)}(x)}{d x^n}\right) = (i y)^n\, \mathcal{F}(f(x)) \qquad (11)$$

Proprietà molto importante che consente la trasformazione di un'equazione differenziale (nello spazio fisico) in un'equazione algebrica (nello spazio trasformato)

Equivalentemente

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{d g(y)}{d y}\right) = -i x\, \mathcal{F}^{-1}(g(y)) \qquad (12)$$

$$= -i x\, f(x)$$

e

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{d g^{(n)}(y)}{d y^n}\right) = (-i x)^n\, \mathcal{F}^{-1}(g(y)) \qquad (13)$$

$$= (-i x)^n\, f(x)$$

3. Moltiplicazione per un polinomio

$$\mathcal{F}(\cancel{*}\, x f(x)) = \text{(da eq. (12))}$$

$$= \frac{1}{-i} \frac{d}{dy} g(y) = i \frac{d}{dy} g(y) \qquad (14)$$

E in generale

$$\mathcal{F}(x^n f(x)) = \text{(da eq. (13))}$$

$$= \frac{(-)^n}{i^n} \frac{d^{(n)} g(y)}{dy^n} = i^n \frac{d^{(n)} g(y)}{dy^n} \qquad (15)$$

Equivalentemente

$$\mathcal{F}^{-1}(y\, g(y)) = \text{(da eq. (10))}$$

$$= \frac{1}{i} \frac{d}{dx} f(x) = -i \frac{d}{dx} f(x) \qquad (16)$$

e in generale

$$\mathcal{F}^{-1}(y^n g(y)) = \text{(da eq. (11))}$$

$$= \frac{1}{i^n} \frac{d^{(n)} f(x)}{dx^n} = (-)^n i^n \frac{d^{(n)} f(x)}{dx} \qquad (17)$$

4 – Integrazione

Se $\quad f_2(x) = \dfrac{f_1(x)}{x} \quad \Longrightarrow \quad f_1(x) = x f_2(x)$

$$\mathcal{F}(f_1(x)) = g_1(y) = \mathcal{F}(x f_2(x)) = i \frac{d}{dy} g_2(y) \quad \text{(da eq. (12))}$$

Integrando questa espressione tra α e y, otteniamo

$$g_2(y) - g_2(\alpha) = -i \int_\alpha^y g_1(s)\, ds$$

Siccome ~~questa~~ $g_2(y) = \mathcal{F}\left(\dfrac{f_1(x)}{x}\right)$ otteniamo

$$\mathcal{F}\left[\frac{f_1(x)}{x}\right] = -i \int_\alpha^y g_1(s)\, ds + C_\alpha \qquad (18)$$

dove C_α è una costante ~~...~~ $C_\alpha = \mathcal{F}\left[\dfrac{f_1(x)}{x}\right]\Bigg|_{y=\alpha}$

Si può anche dimostrare che

$$\mathcal{F}\left(\int_\alpha^x f(u)\, du\right) = -i \frac{\mathcal{F}(f(x))}{y} + C_\alpha \delta(y)$$

$$= -i \frac{g(y)}{y} + C_\alpha \delta(y) \qquad (19)$$

5 _ Traslazione

α reale

$$\mathcal{F}(f(x+\alpha)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+\alpha)\, e^{-ixy}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-iy(x-\alpha)}\, dx$$

$$= e^{+iy\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-iyx}\, dx$$

$$= e^{i\alpha y} g(y) = e^{i\alpha y} \mathcal{F}(f(x)) \qquad (20)$$

Analogamente

$$\mathcal{F}^{-1}(g(y-\alpha)) = e^{i\alpha x} \mathcal{F}^{-1}(g(y)) = e^{i\alpha x} f(x) \qquad (21)$$

6_ Convoluzione

La convoluzione di due funzioni $f_1(x)$ e $f_2(x)$ si definisce come l'integrale

$$c(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\cancel{x})\, f_2(u-\cancel{x})\, d\cancel{x}$$

e si denota come $c(u) = f_1 \star f_2$ (talvolta chiamato prodotto di convoluzione)

Proviamo a trasformare questo integrale

$$\mathcal{F}(\cancel{c}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ixy} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u)\, f_2(x-u)\, du$$

Raggruppando si ottiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ixy} f_2(x-u) = e^{-iuy}\, \mathcal{F}\big(f_2(x)\big) \quad \text{(per eq. 20)}$$

e quindi

$$\mathcal{F}\big(c(x)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} du\, e^{-iuy} f_1(u)\; \mathcal{F}\big(f_2(x)\big)$$

$$= \mathcal{F}\big(f_1(x)\big)\, \mathcal{F}\big(f_2(x)\big) \qquad (22)$$

Questo è un risultato molto importante: la trasformata può essere usata per separare (nello spazio trasformato) ~~...~~ una convoluzione di due funzioni nello spazio reale. La convoluzione è molto comune per descrivere l'influenza dello strumento di misura tramite la funzione di risposta.

Analogamente

$$\mathcal{F}\big(f_1 f_2\big) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(z)\, g_2(y-z)\, dz \qquad (23)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\, g_1 * g_2$$

7_ Funzione di Gauss (Esercizio 9)

$$f(x) = e^{-x^2}$$

$$\mathcal{F}(e^{-x^2}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} e^{-ixy}$$

Sviluppando $g(y)$ in torno a $y=0$

$$g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} y^n$$

dove $$g^{(n)}(0) = (-i)^n \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)\, dx}_{M_n}$$

$f(x) = e^{-x^2}$ é pari $\Rightarrow$ $g^{(n)}(0) = 0$ (n dispari)

Per n pari e $\alpha > 0$ si ha

$$M_{2k} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-\alpha x^2} dx \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Per $k=0$ e $\alpha > 0$ si ha $M_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

Derivando rispetto ad α si ottiene

$$M_{2k} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{(2k-1)!!}{2^k \alpha^k} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

dove $(2k-1)!! = (2k-1)(2k-3) \ldots 3 \cdot 1$

e per $\alpha = 1$, $M_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{2^k} \sqrt{\pi}$

Tornando al calcolo di $g(y)$

$$g(y) = \sqrt{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} (-i)^{2k} \frac{(2k-1)!!}{2^k} y^{2k}$$

$$= \sqrt{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!} \left(\frac{y^2}{2}\right)^k$$

$$= \sqrt{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!} \left(\frac{y^2}{4}\right)^k$$

$$= \sqrt{\pi}\, e^{-y^2/4} = 2\pi \frac{e^{-y^2/4}}{\sqrt{4\pi}}$$

(abbiamo usato la uguaglianza

$$(2k)! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2k = (2k-1)!!\, 2^k\, k!$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left(e^{-x^2}\right) = \sqrt{\pi}\, e^{-y^2/4}$$

Analogamente, per $\alpha > 0$

$$\mathcal{F}\left(e^{-\alpha x^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-y^2/4\alpha}$$

$$= 2\pi \frac{e^{-y^2/4\alpha}}{\sqrt{4\pi\alpha}}$$

$\boxed{\text{Esercizio n. 6}}$

Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = e^{-\alpha|x|}$ $\alpha > 0$

$$\mathcal{F}(f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} e^{-\alpha|x|}\, dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-ixy} e^{-\alpha x}\, dx +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} e^{-ixy} e^{-\alpha|x|}\, dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(iy+\alpha)x}\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha-iy)x}\, dx$$

$$= \left[-\frac{1}{iy+\alpha}\right]_{0}^{\infty} + \left[-\frac{1}{\alpha-iy}\right]_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\alpha+iy} + \frac{1}{\alpha-iy} = \frac{2\alpha}{\alpha^2+y^2}$$

Esercizio 4

Calcolare la trasformata di Fourier di

(a) $e^{-\alpha x}\cos\beta x\, \mathcal{U}(x)$ $\qquad$ (b) $e^{-\alpha x}\sin bx\, \mathcal{U}(x)$

$\alpha > 0$

(a)

$$g(y) = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos\beta x\, e^{-ixy}\,dx$$

$$= \int_0^\infty dx\, e^{-\alpha x}\left(\frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}\right)e^{-ixy}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty dx\left[e^{-(\alpha - i\beta + iy)x} + e^{-(\alpha + i\beta + iy)x}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-(\alpha - i\beta + iy)x}}{\alpha + i(y-\beta)} + \frac{e^{-(\alpha + i\beta + iy)x}}{\alpha + i(y+\beta)}\right]_0^\infty$$

$$\left\{ \mathrm{Re}(\alpha + iu) = \alpha > 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} e^{-(\alpha + iu)x} = 0 \right.$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha + i(y-\beta)} + \frac{1}{\alpha + i(y+\beta)}\right]$$

$$= \frac{\alpha + iy}{(\alpha + iy)^2 + \beta^2}$$

$$= \frac{\alpha + iy}{\alpha^2 + \beta^2 - y^2 + 2i\alpha y}$$

$$= \frac{(\alpha + iy)\left[(\alpha^2+\beta^2-y^2) - 2i\alpha y\right]}{(\alpha^2+\beta^2-y^2)^2 + 4\alpha^2 y^2}$$

$$= \frac{\alpha(\alpha^2+\beta^2+y^2)}{(\alpha^2+\beta^2-y^2)^2+4\alpha^2y^2} - i\,\frac{y(\alpha^2-\beta^2+y^2)}{(\alpha^2+\beta^2-y^2)^2+4\alpha^2y^2}$$

(b) $\mathcal{F}(e^{-\alpha x}\sin\beta x\, U(x)) =$

$$= \frac{1}{2i}\mathcal{F}\left(e^{i\beta x}e^{-\alpha x}U(x)\right) - \frac{1}{2i}\mathcal{F}\left(e^{-i\beta x}e^{-\alpha x}U(x)\right)$$

Per eq. (21)

$$\mathcal{F}(e^{i\beta x}f(x)) = g(y-\beta)$$

e analogamente

$$\mathcal{F}(e^{-i\beta x}f(x)) = g(y+\beta)$$

$$= \frac{1}{2i}\left[g(y-\beta) - g(y+\beta)\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{\alpha+i(y-\beta)} - \frac{1}{\alpha+i(y+\beta)}\right] \quad \text{(da esercizio 2)}$$

$$= \frac{\beta}{(\alpha+iy)^2+\beta^2}$$

Esercizio N.° 26 Risolvere l'equazione integrale

$$\frac{1}{4}\varphi(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|}\,\varphi(y)\,dy + e^{-|x|}$$

$$-\infty < x < \infty$$

L'integrale è il prodotto di convoluzione di $f_1(x) = e^{-|x|}$ e $f_2(x) = \varphi(x)$.

Applicando la trasformata del prodotto di convoluzione

$$\mathcal{F}(f_1 * f_2(x)) = \mathcal{F}(f_1(x))\,\mathcal{F}(f_2(x))$$

otteniamo

$$\frac{1}{4}\mathcal{F}(f_2(x)) = -\mathcal{F}(f_1(x))\,\mathcal{F}(f_2(x)) + \mathcal{F}(f_1(x))$$

Usando il fatto che $\mathcal{F}(f_1(x)) = \mathcal{F}(e^{-|x|}) = \frac{2}{1+y^2}$

(compito a casa)

otteniamo:

$$\frac{1}{4}g_2(y) = -\frac{2g_2(y)}{1+y^2} + \frac{2}{1+y^2}$$

$$\Rightarrow \quad g_2(y)\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{1+y^2}\right) = \frac{2}{1+y^2}$$

$$g_2(y) = \frac{1}{\frac{1+y^2}{8}+1} = \frac{8}{9+y^2}$$

Siccome $\mathcal{F}\left(e^{-\alpha|x|}\right) = \dfrac{2\alpha}{\alpha^2 + y^2}$

Si ha, per $\alpha = 3$

$$\mathcal{F}\left(e^{-3|x|}\right) = \frac{6}{9 + y^2}$$

Finalmente

$$g_2(y) = \frac{4}{3}\,\frac{6}{9 + y^2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}^{-1}(g_2(y)) = f_2(x) = \frac{4}{3}\,\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{6}{9+y^2}\right)$$

e $$\boxed{\varphi(x) = \frac{4}{3}e^{-3|x|}}$$

$\boxed{\text{Esercizio n. 22}}$ Risolvere l'eq. differenziale

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad -\infty < x < \infty \qquad 0 < t < \infty$$

$$v > 0$$

con condizioni iniziali

$$f(x,0) = g(x) \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{t=0} = \varphi(x)$$

(Vibrazioni trasversali di una corda lunga con spostamento e velocità iniziale noti)

Si fa la trasformata sulla variabile t:

Per (11) si ha che $\mathcal{F}\left(\frac{\partial^{(2)} f(x)}{\partial x^2}\right) = -y^2 \mathcal{F}(f(x))$

e quindi si ottiene

$$v^2 y^2 \mathcal{F}(f(x,t)) + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(f(x,t))}{\partial t^2} = 0$$

Quest'equazione ha soluzione generale

$$\boxed{\mathcal{F}(f(x,t)) = A(y)\, e^{ivyt} + B(y)\, e^{-ivyt}} \qquad (22.1)$$

La soluzione dovrà verificare le condizioni iniziali

$$\mathcal{F}(f(x,0)) = \mathcal{F}(g(x)) \quad e \quad \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}(f(x,t))\Big|_{t=0} = \mathcal{F}(\varphi(x))$$

La prima da

$$\mathcal{F}(f(x,0)) = A(y) + B(y) = \mathcal{F}(g(x))$$

e la seconda

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}(f(x,t))}{\partial t}\right)_{t=0} = i\nu y\cdot\left(A(y) - B(y)\right) = \mathcal{F}(\varphi(x))$$

$$\Rightarrow \quad A(y) - B(y) = \frac{1}{i\nu y}\,\mathcal{F}(\varphi(x))$$

Da queste due equazioni si ha

$$2\,A(y) = \mathcal{F}(g(x)) + \frac{1}{i\nu y}\,\mathcal{F}(\varphi(x))$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A(y) = \frac{1}{2}\,\mathcal{F}(g(x)) + \frac{1}{2i\nu y}\,\mathcal{F}(\varphi(x))}$$

.. e $\quad \boxed{B(y) = \frac{1}{2}\,\mathcal{F}(g(x)) - \frac{1}{2i\nu y}\,\mathcal{F}(\varphi(x))}$

Sostituendo, in (22.1) otteniamo:

$$\mathcal{F}(f(x,t)) = \frac{1}{2}\,\mathcal{F}(g(x))\left\{e^{i\nu yt} + e^{-i\nu yt}\right\} +$$

$$\frac{1}{2}\,\mathcal{F}(\varphi(x))\left\{\frac{e^{i\nu yt} - e^{-i\nu yt}}{i\nu y}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathcal{F}(g(x))\left\{e^{i\nu yt} + e^{-i\nu yt}\right\} +$$

$$+ \cancel{\ }\,\mathcal{F}(\varphi(x))\,\frac{\sin(\nu yt)}{\nu y}$$

Antitrasformando otteniamo $f(x,t)$:

$$f(x,t) = \frac{1}{2} \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}(g(x))\, e^{ivyt}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}(g(x))\, e^{-ivyt}\right] +$$

$$+ \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}(\varphi(x))\, \frac{\sin(vyt)}{vy}\right]$$

$$= \frac{1}{2} g(x+vt) + \quad (\text{per Eq (21)})$$

$$+ \frac{1}{2} g(x-vt) + \quad (\text{per eq. (21)})$$

$$+ \frac{1}{v}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x')\, \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin(vty)}{y}\right]_{x-x'} dx' \quad (\text{per eq.(22)})$$

Siccome $\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin(vty)}{y}\right] = \frac{1}{2} P_{vt}(x)$ (vedi Es. 1)

Si ha che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x')\, \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin(vty)}{y}\right]_{x-x'} dx' =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x')\, P_{vt}(x-x')\, dx'$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x-vt}^{x+vt} \varphi(x')\, dx'$$

Finalmente otteniamo

$$\boxed{f(x,t) = \frac{1}{2}\, g(x+vt) + \frac{1}{2}\, g(x-vt) + \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} \varphi(x')\, dx'}$$