essendo il regime stazionario, si esprime dicendo che il numero totale dei neutroni assorbiti nel mezzo (per unità di tempo) deve essere uguale al numero dei neutroni emessi dalla sorgente (per unità di tempo). In formule avremo

$$(53a) \qquad Q = \int_0^\infty \Sigma_a \Phi(r)\, 4\pi r^2\, dr = 4\pi A\, \Sigma_a \int_0^\infty r e^{-\varkappa r}\, dr = 4\pi A \frac{\Sigma_a}{\kappa^2},$$

da cui si trae

$$(53b) \qquad A = \frac{\varkappa^2 Q}{4\pi \Sigma_a} = \frac{Q}{4\pi D},$$

come già visto nella (52b).

Cerchiamo ora di approfondire il significato fisico della lunghezza di diffusione, L, ricordata dalla (41b) e già introdotta con la (14, III).

Cominciamo col porci il problema del calcolo della distanza media percorsa da un neutrone dal punto dove esso è generato (cioè, dalla sorgente localizzata ad $r = 0$) fino al punto dove esso è assorbito. Come funzione peso sceglieremo la probabilità che ha un neutrone di essere assorbito nella «shell» sferica compresa fra r e $r + dr$. Questa probabilità è misurabile in termini del numero di neutroni assorbiti, per unità di tempo, nel volume sferico compreso fra r e $r + dr$, che vale ovviamente [1]

$$(54) \qquad n_a(r)\,(V_{r+dr} - V_r) \cong 4\pi r^2\, \Sigma_a \Phi(r)\, dr,$$

dove con $n_a(r)$ indichiamo la densità dei neutroni assorbiti e con V_{r+dr} e V_r il volume, rispettivamente, della sfera di raggio $r + dr$ e della sfera di raggio r.

[1] Il segno $\sim$ nella (54) deriva dal fatto che nell'espressione $V_{r+dr} - V_r$ si trascurano i termini infinitesimi di ordine superiore. Si ha infatti

$$V_{r+dr} - V_r = \frac{4}{3}\pi\left[(r+dr)^3 - r^3\right] = \frac{4}{3}\pi\left[(r^3 + 3r^2\,dr + 3r\,(dr)^2 + (dr)^3) - r^3\right] \cong 4\pi r^2\,dr.$$

Con la funzione peso espressa dalla (54), definiamo allora

$$(55) \qquad \overline{r^n} = \langle r^n \rangle = \frac{\int_0^\infty r^n n_a(r)\,dr}{\int_0^\infty n_a(r)\,dr} = \varkappa^2 \int_0^\infty r^n n_a(r)\,dr,$$

come segue dalla (53a). La (55) esprime così che il valore medio della potenza n-ima della distanza percorsa dal neutrone è proporzionale, tramite il parametro $\varkappa^2$, al momento n-imo della funzione $n_a(r)$, definita dalla (54).

Per $n = 1$ si ottiene

$$(56a) \qquad \langle r \rangle = \frac{2}{\varkappa} = 2L$$

e per $n = 2$

$$(56b) \qquad \langle r^2 \rangle = \frac{6}{\varkappa^2} = 6L^2.$$

Si accerta quindi che la lunghezza di diffusione, L, ed il suo quadrato, L^2, sono certe frazioni (1/2 ed 1/6, rispettivamente) della distanza media e della distanza quadratica media che il neutrone percorre fra il punto in cui è generato ed il punto in cui è assorbito.

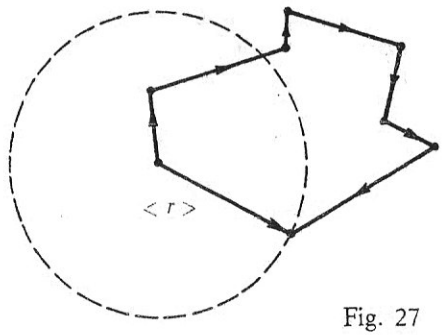

Fig. 27

La distanza media $< r >$ non va confusa con la distanza media che attualmente viene percorsa dal neutrone: quest'ultima, che è rappresentata da $\lambda_a = 1/\Sigma_a$, è molto maggiore di $< r >$, una volta che si tiene presente che, per effetto dello scattering, il neutrone percorre una spezzata (sghemba) prima di venire assorbita (cfr. Fig. 27).

Vedremo più oltre, nell'applicazione della (1) ad una geometria parallelepipeda finita, come può essere interpretata la misura della lunghezza di diffusione.

4. Sorgente piana infinita isotropa sul piano $z = 0$.

Consideriamo ora il caso di un mezzo infinito nelle tre direzioni x, y e z. In questo mezzo agisce una sorgente piana infinita, che emette isotropicamente Q neutroni/cm² $\times$ sec. e che è localizzata sul piano $z = 0$. Il flusso neutronico sarà allora funzione della sola ascissa z.

La (1) diventa così

$$D \frac{d^2\Phi(z)}{dz^2} - \Sigma_a \Phi(z) + Q\,\delta(z) = 0. \tag{57}$$

Procediamo come fatto nel caso di sorgente puntiforme, distinguendo, per la risoluzione della (57), metodi diretti e metodi indiretti.

Metodo diretto di elezione per una equazione del tipo della (57) è quello basato sulla tecnica della trasformata di Fourier. A questo fine definiamo come

$$\tilde{\Phi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(z)\, e^{-i\omega z}\, d\omega \tag{58}$$

la trasformata monodimensionale di Fourier della funzione incognita $\Phi(z)$. (Dal confronto con la (44a, III) si arguisce che $\omega \equiv B_z$).

Tenuto conto che la (57) va integrata con le condizioni all'infinito

$$\Phi(\pm\infty) = \Phi'(\pm\infty) = 0, \tag{59}$$

(il mezzo si estende da $z = -\infty$ a $z = +\infty$), è subito visto, per successive integrazioni per parti, che la trasformata di Fourier della derivata seconda di $\Phi(z)$ è

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2\Phi(z)}{dz^2}\, e^{-i\omega z} d\omega = -\omega^2\, \tilde{\Phi}(\omega). \tag{60}$$

Poiché

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(z)\, e^{-i\omega z}\, dz = 1, \tag{61}$$

dalla (57) si trae

$$\tilde{\Phi}(\omega) = \frac{1}{D} \cdot \frac{Q}{\omega^2 + \varkappa^2}, \tag{62}$$

dove $\varkappa^2$ è ancora dato dalla (41a).

L'antitrasformazione di ambo i membri della (62) fornisce allora

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(\omega)\, e^{i\omega z}\, d\omega = \frac{Q}{2\pi D} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega z}}{\omega^2 + \varkappa^2}\, d\omega = \tag{63}$$

$$= \frac{Q}{\pi D} \int_{0}^{\infty} \frac{\cos \omega z}{\omega^2 + \varkappa^2}\, d\omega = \frac{Q}{2\kappa D}\, e^{-\varkappa |z|},$$

che è la cercata soluzione per la (57).