

TRASPORTO DI NEUTRONI

*Appunti per il corso di
TRASPORTO DI PARTICELLE E RADIAZIONI
per gli allievi del Corso di Laurea Specialistica in
INGEGNERIA ENERGETICA*

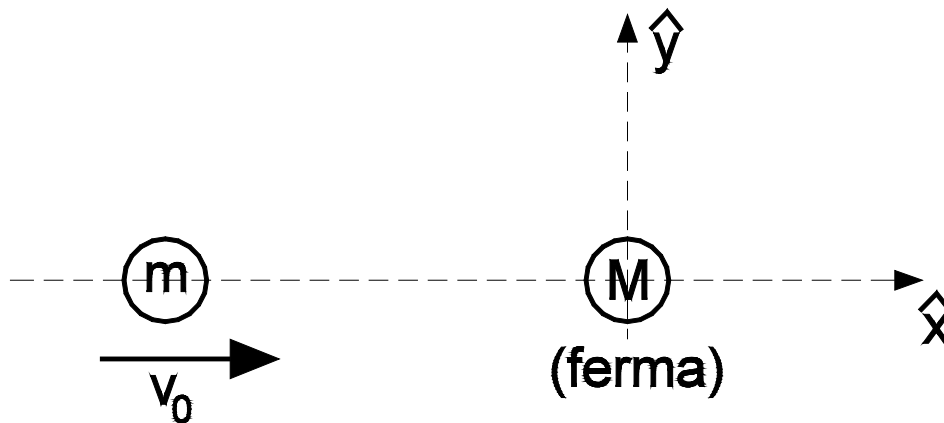
*Modulo tenuto dal Prof. Ing. DOMIZIANO MOSTACCI
per l'AA 2019/2020*

pagina intenzionalmente vuota

I. LA MECCANICA DELL'URTO BINARIO ELASTICO

I.1 Meccanica dell'urto

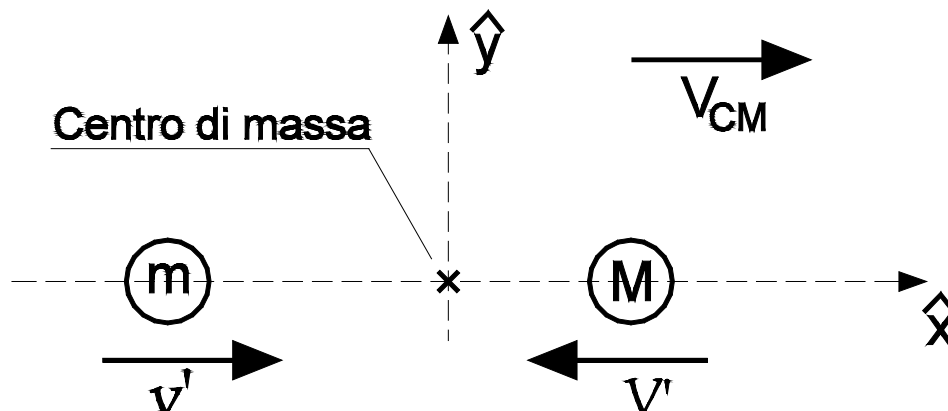
Si abbia una particella di massa m e velocità v_0 ("proiettile") che incide contro una particella ferma di massa M ("bersaglio"), ove le velocità si intendono riferite al sistema di riferimento del laboratorio (LAB).



Conviene analizzare prima il fenomeno nel sistema di riferimento del centro di massa (CM). In primo luogo, la velocità del centro di massa stesso è data da:

$$V_{CM} = \frac{m \cdot v_0 + M \cdot 0}{m + M} = \frac{m}{m + M} v_0$$

Il sistema di riferimento CM trasla perciò con velocità V_{CM} .



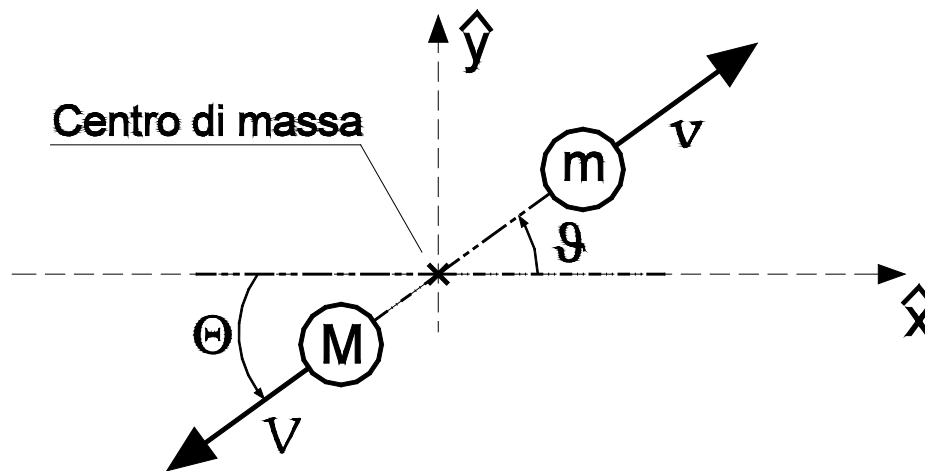
Applicando quindi le trasformazioni di Galileo troviamo le velocità nel CM, e qui utilizzeremo un apice per indicare “prima dell’urto”:

$$\begin{cases} \mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}_{CM} = v_0 - \mathbf{V}_{CM} = v_0 - \frac{m}{m+M} v_0 = \frac{M}{m+M} v_0 \\ \mathbf{V}' = \mathbf{V} - \mathbf{V}_{CM} = 0 - \mathbf{V}_{CM} = 0 - \frac{m}{m+M} v_0 = -\frac{m}{m+M} v_0 \end{cases}$$

Per comodità, chiameremo \hat{x} la direzione di moto del proiettile. Quindi:

$$\begin{cases} \mathbf{v}' = \frac{M}{m+M} v_0 \hat{x} \\ \mathbf{V}' = -\frac{m}{m+M} v_0 \hat{x} \end{cases}$$

Ora esaminiamo l’urto ELASTICO, vale a dire *senza cambiamento dell’energia totale*. Diciamo ϑ l’angolo di cui il proiettile viene deviato in seguito all’urto.



Applichiamo i principi di conservazione della quantità di moto (qdm) e dell’energia. La qdm totale (la somma vettoriale delle qdm delle due particelle) nel CM prima dell’urto è nulla (per definizione di centro di massa); poiché non vi sono forze esterne, deve continuare ad essere nulla:

$$m\mathbf{v} + M\mathbf{V} = 0$$

quindi occorre che le velocità delle due particelle dopo l’urto abbiano uguale direzione e verso opposto, quindi per gli angoli in figura $\Theta = \vartheta$, e che inoltre i loro moduli soddisfino la relazione

$$m\mathbf{v} = M\mathbf{V}$$

L'energia totale, poiché non vi sono forze esterne (e quindi non vi è lavoro esterno) e poiché l'urto è elastico (non dissipa e non produce energia) deve essere la stessa prima e dopo l'urto:

$$E_{\text{Tot}} = \frac{m v^2}{2} + \frac{M V^2}{2} = E'_{\text{Tot}} = \frac{m v'^2}{2} + \frac{M V'^2}{2}$$

Calcoliamo rapidamente l'energia totale prima dell'urto:

$$E'_{\text{Tot}} = \frac{m v'^2}{2} + \frac{M V'^2}{2} = \frac{1}{2} \left\{ m \left(\frac{M}{m+M} \right)^2 v_0^2 + M \left(\frac{m}{m+M} \right)^2 v_0^2 \right\} = \frac{mM}{m+M} \frac{v_0^2}{2}$$

Quindi abbiamo, in definitiva, un sistema di 2 equazioni nelle due incognite v e V :

$$\begin{cases} m v = M V \\ m v^2 + M V^2 = \frac{mM}{m+M} v_0^2 \end{cases}$$

Risolvendolo si trova (lasciamo i passaggi come esercizio):

$$\begin{cases} v = \frac{M}{m+M} v_0 & \text{(notare che è } = v' \text{ !!!)} \\ V = \frac{m}{m+M} v_0 & \text{(e che questo è } = V' \text{ !!!)} \end{cases}$$

In seguito ad un urto elastico (attenzione: visto dal CM!!) le due particelle cambiano direzione MA NON CAMBIA IL MODULO delle loro velocità!, né quindi cambiano le rispettive energie. Ora ritorniamo nel LAB. Rifacciamo le trasformazioni di Galileo in senso inverso e troviamo, naturalmente:

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{V}_{\text{CM}} \\ \mathbf{V} = \mathbf{V} + \mathbf{V}_{\text{CM}} \end{cases}$$

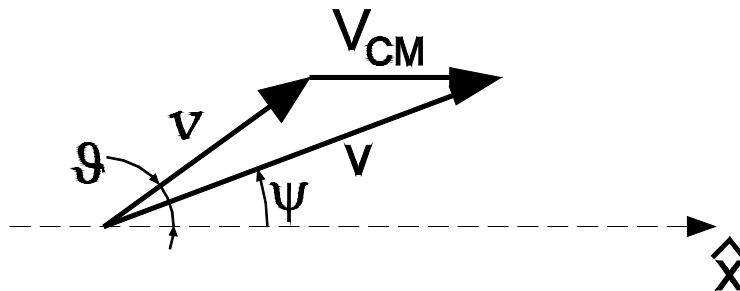
Conviene esprimere tutto in termini delle componenti x ed y (riferendosi quindi al piano determinato dalle due direzioni della velocità: prima e dopo l'urto. L'asse x lo scegliamo sempre lungo la direzione della velocità prima dell'urto, e l'asse y si sceglie di conseguenza):

$$\begin{cases} V_{\text{CM}} = V_{\text{CM}} \hat{x} \\ \mathbf{V} = V \cos \vartheta \hat{x} + V \sin \vartheta \hat{y} \\ \mathbf{V} = -V \cos \vartheta \hat{x} - V \sin \vartheta \hat{y} \end{cases}$$

Occupandoci ora solo del proiettile, troviamo quindi:

$$\begin{cases} [v]_x = v \cos \vartheta + V_{CM} = \frac{M}{m+M} v_0 \cos \vartheta + \frac{m}{m+M} v_0 = \frac{v_0}{m+M} (M \cos \vartheta + m) \\ [v]_y = v \sin \vartheta = \frac{v_0}{m+M} M \sin \vartheta \end{cases}$$

Diciamo ora ψ l'angolo di scattering nel LAB: esso sarà in generale diverso da ϑ .



Troviamo che esso è dato (in forma implicita) da:

$$\cos \psi = \frac{[v]_x}{\sqrt{[v]_x^2 + [v]_y^2}} = \frac{M \cos \vartheta + m}{\sqrt{M^2 + 2mM \cos \vartheta + m^2}}$$

Utilizzeremo ampiamente anche le notazioni $\mu_c = \cos \vartheta$ e $\mu_0 = \cos \psi$ per indicare il coseno dell'angolo ϑ di deviazione (ovvero *angolo di scattering*) nel CM ed il corrispondente nel sistema del LAB, per cui la relazione tra il coseno μ_0 dell'angolo di scattering **nel LAB** ed il coseno μ_c dell'angolo di scattering **nel CM** diviene (VIF: *Very Important Formula!*)

$$\mu_0 = \frac{M\mu_c + m}{\sqrt{M^2 + 2mM\mu_c + m^2}}$$

Calcoliamo l'energia dopo l'urto posseduta dalla particella proiettile (sempre nel LAB, sappiamo già che nel CM è uguale a quella prima dell'urto):

$$E = \frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2) = \frac{m}{2} \left(\frac{v_0}{m+M} \right)^2 \left[(M \cos \vartheta + m)^2 + (M \sin \vartheta)^2 \right]$$

Ricordando che l'energia del proiettile prima dell'urto è dato da

$$E' = \frac{m}{2} v_0^2$$

troviamo in definitiva, dopo qualche semplice passaggio:

$$E = E' \frac{M^2 + 2mM \cos \vartheta + m^2}{(m + M)^2}$$

Si vede pertanto che al variare di $\mu_0 = \cos \vartheta$ tra 1 e -1, l'energia dopo l'urto varia tra E' ed $\alpha \cdot E'$, dove

$$\alpha = \left(\frac{M - m}{M + m} \right)^2$$

Questa nel caso dei neutroni contro nuclei di numero di massa A diviene la ben nota “alfa”, infatti, dividendo numeratore e denominatore per m (approssimando la massa atomica con $m \times A$)

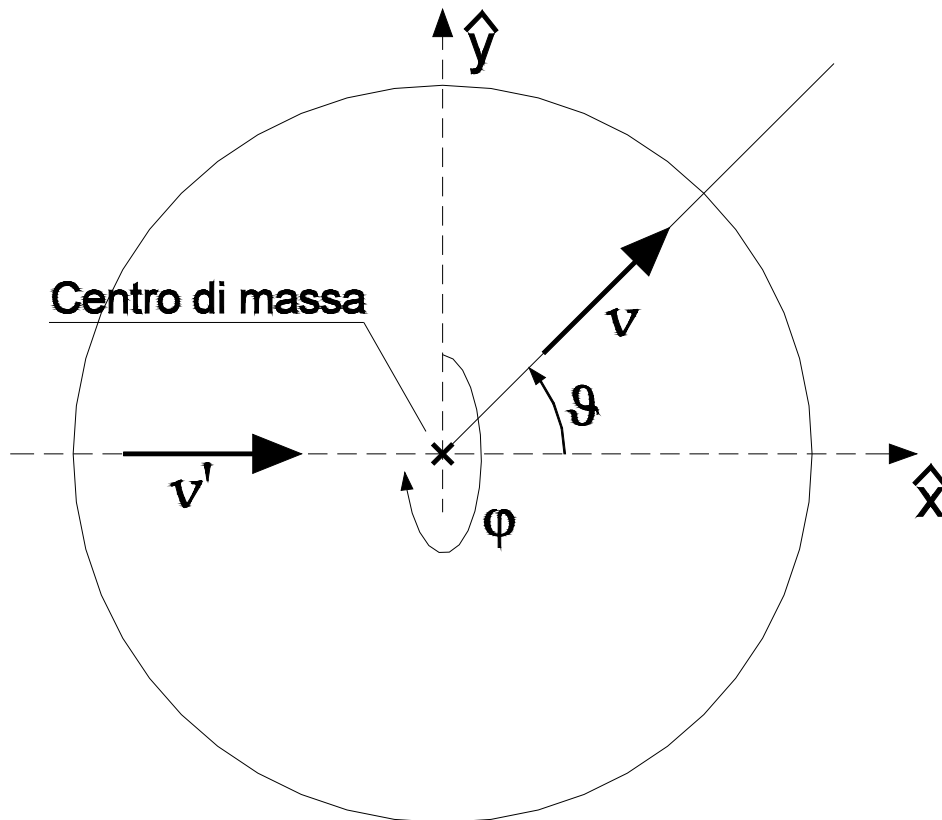
$$\alpha = \left(\frac{A - 1}{A + 1} \right)^2$$

I.2 Scattering isotropo nel centro di massa

Si fa spesso l'ipotesi che lo scattering sia isotropo nel CM. Cosa vuol dire isotropo? Dire che “tutte le direzioni di deflessione sono equiprobabili” è un po' vago. Quantifichiamo questa affermazione. Si immagini di individuare una sfera di raggio qualunque, diciamo R , centrata nel punto di impatto: essa avrà superficie $4\pi R^2$. Dopo l'impatto il proiettile assume una qualche direzione, e se abbiamo individuato un'area ΔS sulla superficie sferica la direzione di uscita della particella dopo l'urto potrà attraversare o non attraversare tale area. A tale evento (attraversare l'area) si può attribuire una probabilità. Dire che tutte le direzioni di scattering sono equiprobabili corrisponde a dire che prese due aree qualunque ΔS_1 e ΔS_2 sulla sfera, se queste hanno uguale superficie allora hanno uguale probabilità di venire attraversate dalla direzione di uscita assunta dal proiettile a seguito dello scattering. Poiché naturalmente l'intera superficie della sfera (di area $4\pi R^2$) ha probabilità 1 di venire attraversata, ecco che la probabilità $P[\Delta S]$ che una superficie di area ΔS ha di venire attraversata è semplicemente data da:

$$P[\Delta S] = \frac{\Delta S}{4\pi R^2}$$

Cioè, con la terminologia del calcolo delle probabilità: la probabilità ha densità uniforme sulla superficie sferica. Vogliamo legare tutto questo all'angolo di scattering che già conosciamo: per fare ciò, stabiliamo un sistema di coordinate sferiche avente centro nel punto di impatto (o, che è lo stesso, nel centro di massa, poiché è lì che avviene l'impatto) e asse polare diretto lungo \hat{x} , vale a dire sempre la direzione iniziale di avvicinamento delle particelle, più precisamente la direzione del moto del proiettile.



Osserviamo che con questa scelta del sistema di riferimento e dei suoi parametri, la colatitudine ϑ coincide con l'angolo di scattering nel CM.

Come si sa, un elemento di superficie elementare in coordinate sferiche con le variabili di figura si esprime come:

$$dS = R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

Benché la direzione di uscita sia specificata da due angoli, la colatitudine ϑ e l'azimuth φ , in generale siamo interessati all'angolo di scattering (nel CM, ricordiamolo), che coincide con la colatitudine come visto: non siamo interessati a precisare l'azimuth φ . Le quantità che ci interessano, infatti, e cioè l'energia e l'angolo di scattering nel LAB, dipendono solo dall'angolo

di scattering nel CM e non dall'azimuth. Possiamo allora integrare rispetto a φ , vale a dire considerare superfici elementari costituite da corone di calotta sferica: una tale superficie è tutta la porzione di superficie sferica corrispondente all'intervallo di colatitudine $[\vartheta, \vartheta+d\vartheta]$. L'area dS_C di tale elemento è quindi data da:

$$dS_C = 2\pi R^2 \sin \vartheta d\vartheta$$

Possiamo ora calcolare con la formula vista poc'anzi la probabilità dell'evento "la direzione di uscita attraversa tale elemento", vale a dire la probabilità dell'evento "l'angolo di scattering è compreso tra ϑ e $\vartheta+d\vartheta$ ":

$$P[dS_C] = \frac{dS_C}{4\pi R^2} = \frac{2\pi R^2 \sin \vartheta d\vartheta}{4\pi R^2} = \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{2} = \frac{d\mu_C}{2}$$

ove μ_C naturalmente varia tra -1 ed 1 .

Il risultato appena trovato è molto interessante, almeno per chi si ricorda la definizione di probabilità uniforme su un intervallo: la densità di probabilità per il coseno dell'angolo di scattering (nel CM) μ_C è *uniforme sull'intervallo $[-1, 1]$* . Invece la densità di probabilità per l'angolo di scattering ϑ **NON È uniforme sull'intervallo $[0, \pi]$** .

Ricapitolando: se lo scattering è isotropo, allora porzioni della superficie sferica che hanno la medesima area hanno la medesima probabilità di venire attraversate dalla direzione di uscita del proiettile; come conseguenza, la distribuzione del coseno dell'angolo di scattering $\mu_C = \cos \vartheta$ (e **NON** dell'angolo ϑ stesso) è uniforme sull'intervallo di definizione, che è $[-1, 1]$, e la sua densità di probabilità è $f(\mu_C) = \frac{1}{2}$.

I.3 Coseno medio di scattering

Conoscendo la densità di probabilità possiamo facilmente calcolare il valore atteso, o medio che dir si voglia: è il cosiddetto coseno medio di scattering.

Cominciamo, come al solito dal CM:

$$\langle \mu_C \rangle = \int_{-1}^1 \mu_C f(\mu_C) d\mu_C = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu_C d\mu_C = 0$$

Il coseno medio di scattering nel CM è zero (ricordiamo che ci stiamo sempre riferendo ad urto isotropo nel CM). Possiamo calcolare l'analogia quantità nel LAB? Certo:

$$\langle \mu_0 \rangle = \int_{-1}^1 \mu(\mu_C) \times f(\mu_C) d\mu_C = \int_{-1}^1 \frac{M\mu_C + m}{\sqrt{M^2 + m^2 + 2mM\mu_C}} \times \frac{1}{2} d\mu_C$$

Per calcolare questo integrale osserviamo dapprima che:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b} \sqrt{a+bx}$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2x}{b} \sqrt{a+bx} - \frac{4}{3b^2} (a+bx)^{\frac{3}{2}}$$

Pertanto, ponendo $a = M^2 + m^2$ e $b = 2mM$, e naturalmente $x = \mu_C$, troviamo:

$$\begin{aligned} \langle \mu_0 \rangle &= \frac{1}{2M} \left[\sqrt{(m+M)^2} - \sqrt{(m-M)^2} \right] + \\ &+ \frac{1}{2m} \left[\sqrt{(m+M)^2} + \sqrt{(m-M)^2} \right] - \frac{1}{6Mm^2} \left[\left(\sqrt{(m+M)^2} \right)^3 - \left(\sqrt{(m-M)^2} \right)^3 \right] \end{aligned}$$

Come ben sappiamo, $\sqrt{(m \pm M)^2} = |m \pm M|$. Ora, per il caso della somma non ci sono problemi (infatti sia M che m sono definiti positivi) e $|m + M| \equiv m + M$. Diverso è il caso della differenza: consideriamo dapprima il caso $M \geq m$, per cui $|m - M| \equiv M - m$.

$$\begin{aligned} \langle \mu_0 \rangle &= \frac{1}{2M} [m + M - (M - m)] + \frac{1}{2m} [m + M + (M - m)] - \frac{1}{6Mm^2} [(m + M)^3 - (M - m)^3] \\ &= \frac{m}{M} + \frac{M}{m} - \frac{3mM^2 + m^3}{3Mm^2} = \frac{3m^2 + 3M^2 - 3M^2 - m^3}{3Mm^2} = \frac{2m}{3M} \end{aligned}$$

In particolare se si considerano neutroni contro nuclei di massa atomica A , cioè nuclei per i quali

$$\frac{M}{m} \approx A, \text{ si ritrova il risultato classico: } \langle \mu_0 \rangle = \frac{2}{3A}.$$

Considerando ora il caso $m \geq M$, per cui $|m - M| \equiv m - M$, troviamo con analogo procedimento (lasciamo come esercizio la derivazione):

$$\langle \mu_0 \rangle = 1 - \frac{M^2}{3m^2}$$

Come mai questo risultato NON È simmetrico al precedente? Cioè non si ottiene semplicemente scambiando m con M ? Si lascia come esercizio anche la spiegazione fisica di questo fatto.

Si raccomanda di risolvere anche i problemi a fine capitolo.

I.4 Perdita media di energia

Riprendiamo l'espressione dell'energia dopo l'urto, che riscriveremo in funzione di A e μ_C :

$$E = E' \frac{A^2 + 1 + 2A\mu_C}{(A + 1)^2}$$

Possiamo fare immediatamente due considerazioni:

- ❖ in primo luogo vediamo che l'energia finale E è senz'altro compresa tra $\alpha E'$ ed E' , limiti che corrispondono rispettivamente a $\mu_C = -1$ ed $\mu_C = +1$
- ❖ poi, per dato E' la dipendenza di E da μ_C è lineare, quindi per note proprietà, se la densità di probabilità per μ_C è uniforme su $\mu_C \in [-1, 1]$, altrettanto avviene per la densità di probabilità per E sul corrispondente intervallo $E \in [\alpha E', E']$

Con queste premesse possiamo scrivere immediatamente la densità di probabilità per E :

$$f_E(E) = \begin{cases} \frac{1}{E'} \frac{1}{1 - \alpha} & E \in [\alpha E', E'] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Un'altra quantità che sarà utile è il valor medio della perdita di energia, o ancora medio, il DECREMENTO MEDIO LOGARITMICO ξ , vale a dire il valor medio di $\ln\left(\frac{E'}{E}\right)$. Calcoliamolo:

$$\xi = \left\langle \ln\left(\frac{E'}{E}\right) \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(\frac{E'}{E}\right) f_E(E) dE = \frac{1}{1 - \alpha} \frac{1}{E'} \int_{\alpha E'}^{E'} \ln\left(\frac{E'}{E}\right) dE = 1 - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

È da osservare un fatto di notevole interesse: ξ *non dipende da E'*, cioè ha sempre lo stesso valore (che dipende solo da α , cioè in definitiva da A) - qualunque sia l'energia posseduta dal neutrone al momento dell'urto, *ne perde sempre* (mediamente, si intende) *la stessa frazione*.

Possiamo quindi calcolare il numero medio $\langle N \rangle$ di collisioni necessario perché un neutrone passi dall'energia E_0 all'energia E_1

$$\langle N \rangle = \frac{1}{\xi} \ln \left(\frac{E'}{E} \right)$$

È chiaro che tale numero, per date E' ed E dipende esclusivamente da α , quindi da A, cioè in definitiva dal materiale attraverso cui i neutroni diffondono. Ad esempio, qual è il numero medio di collisioni necessarie per portare un neutrone dall'energia di 2 MeV (energia di fissione) all'energia di 0,025 eV (energia termica)?

$$\langle N_{th} \rangle = \frac{1}{\xi} \ln \left(\frac{2 \times 10^6}{0,025} \right) = \frac{18,2}{\xi}$$

Questo numero è riportato nella seguente tabella per diversi materiali.

Tabella 1: Parametri di rallentamento					
Elemento	A	α	$\langle \mu_0 \rangle$	ξ	$\langle N_{th} \rangle$
H	1	0,000	0,667	1,000	18
D	2	0,111	0,333	0,725	25
⁴ He	4	0,360	0,167	0,425	43
Li	7	0,562	0,095	0,268	67
Be	9	0,640	0,074	0,209	86
C	12	0,719	0,056	0,158	114
O	16	0,778	0,042	0,120	150

Vediamo che il miglior rallentatore è l'idrogeno, che ha il più alto valore di ξ e quindi il minimo valore di $\langle N_{th} \rangle$. È chiaro però che è importante anche la sezione d'urto di scattering: un elemento che avesse una sezione d'urto bassissima, anche in presenza di un ottimo ξ sarebbe un moderatore poco efficace: ecco che quello che interessa, ai fini delle proprietà di rallentamento, è il prodotto $\xi \Sigma_s$ di queste due quantità, detto potere di rallentamento. Inoltre quando si è

interessati al bilancio neutronico (ad esempio nel progetto di un reattore) ci si deve domandare anche se l'elemento considerato non abbia una sezione d'urto di assorbimento troppo elevata, e quindi occorre in tal caso introdurre un'altra cifra di merito detta rapporto di moderazione, che si esprime come $\xi\Sigma_s/\Sigma_a$. Ambedue queste quantità sono utili: se interessa solo la capacità di rallentare, ad esempio nel progetto di uno schermo – dove l'assorbimento è addirittura un vantaggio – ci riferiremo al potere di rallentamento; se viceversa occorre rispettare un bilancio neutronico, come è il caso nel progetto di un nocciolo, converrà riferirsi al rapporto di moderazione. Nella tabella che segue sono riportate queste quantità per alcuni materiali (le sommatorie si intendono estese agli elementi componenti).

Materiali	$\sum_i \xi_i \Sigma_{s,i}$	$\sum_i \xi_i \Sigma_{s,i} / \sum_i \Sigma_{a,i}$
H ₂ O	1,53	72
D ₂ O	0,170	12000
⁴ He (STP)	$1,6 \times 10^{-5}$	83
Be	0,176	159
Grafite	0,064	170

Si vede cos' che l'acqua leggera ha il più alto potere di rallentamento (ottima per lo schermaggio) mentre l'acqua pesante ha di gran lunga il miglior rapporto di moderazione (la più adatta quindi ai reattori).

Problemi da svolgere:

1. Se $m=M$, quanto vale $\langle \mu_0 \rangle$?
2. Quanto vale $\langle \mu_0 \rangle$ se $m \lll M$? (cioè proiettile che incide su bersaglio infinitamente massivo)
3. Quanto vale $\langle \mu_0 \rangle$ se $M \lll m$? (cioè proiettile che incide su bersaglio infinitamente leggero)
4. Qual è il MASSIMO valore possibile di $\langle \mu_0 \rangle$?
5. Qual è il MINIMO valore possibile di $\langle \mu_0 \rangle$?
6. Giustificate con considerazioni fisiche i risultati trovati ai precedenti due problemi (n. 4 e 5)

pagina intenzionalmente vuota

II - L'EQUAZIONE INTEGRALE DEL TRASPORTO

PER NEUTRONI MONOENERGETICI

II.1 Derivazione dell'Equazione integrale

Si abbia un mezzo non moltiplicante (cioè che non produce neutroni), che sia isotropo, omogeneo, infinito e costituito da nuclei pesanti, in cui ad un certo istante siano presenti neutroni di una singola energia. Il mezzo abbia sezione d'urto macroscopica totale data dalla somma di una sezione d'urto di scattering elastico (considereremo energie per cui lo scattering è solo elastico: $1 \text{ eV} \div 2 \text{ MeV}$) ed una di assorbimento, con esclusione di ogni altro tipo di interazione: $\Sigma = \Sigma_a + \Sigma_s$. Per le ipotesi fatte di scattering elastico contro nuclei pesanti, sappiamo che i neutroni mantengono sostanzialmente invariata la loro energia, limitandosi a cambiare direzione del moto. Potremo allora considerare una situazione altamente idealizzata ma con un fondo di verità: neutroni sempre tutti di una sola energia, detti appunto neutroni monoenergetici. Questo problema risulta molto più agevole da trattare del caso polienergetico di cui ci occuperemo più avanti, ma è utilissimo per familiarizzarsi con le metodiche della teoria del trasporto.

Riprendiamo in esame le sezioni d'urto: esse saranno indipendenti dalla posizione nel mezzo diffondente (in quanto questo è stato preso omogeneo) e dalla direzione del moto dei neutroni (il mezzo è stato scelto isotropo), né dipenderanno dall'energia dei neutroni: infatti vi è un'unica energia presente. Considereremo infine lo scattering isotropo nel sistema del centro di massa (che è la realtà per i neutroni nell'intervallo di energie che consideriamo): poiché i nuclei sono "pesanti", il centro di massa in ogni collisione coincide praticamente col nucleo, che è fermo nel sistema del laboratorio. Questo ci permette di considerare lo scattering *isotropo nel sistema del laboratorio*.

Ora, facciamo riferimento alla figura seguente, in cui abbiamo individuato 2 volumi elementari: uno intorno al punto \bar{x} in cui vogliamo calcolare il flusso, ed uno intorno ad un generico punto \bar{x}' . Il secondo è, come si vede, il solito volumetto elementare cubico $d_3\bar{x}' = dx dy dz$, mentre per il primo è stata scelta una forma particolarmente comoda: un cilindretto con l'asse lungo la direzione $\bar{x}' - \bar{x}$, avente area di base d_2a ed altezza $dh = v \cdot dt$, ove v è la velocità (in modulo) unica di tutti i neutroni.

Consideriamo il flusso incognito $\Phi(\bar{x}, t)$ che vogliamo determinare. Preliminarmente, ricordiamo che il flusso rappresenta la somma dei cammini percorsi nell'unità di tempo dai neutroni contenuti nell'unità di volume, quindi nel caso presente possiamo definire il prodotto

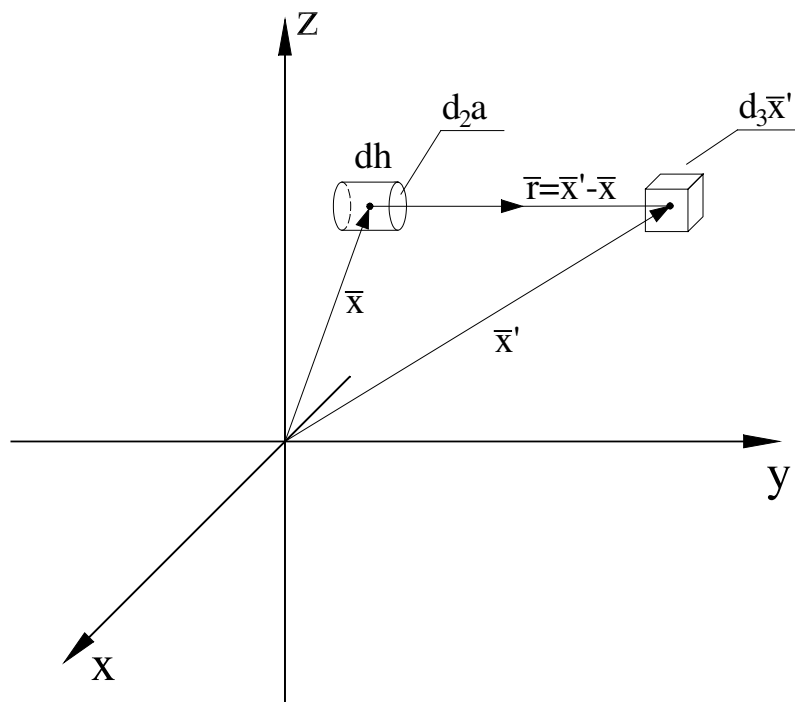
$\Phi(\bar{x}, t) \cdot d_2a \cdot dh \cdot dt$ come la somma dei cammini percorsi nel tempo dt dai neutroni che all'istante t si trovano nel volumetto elementare.

Possiamo anche scegliere un modo diverso di ragionare sul problema: sappiamo che, essendo i neutroni monoenergetici, cioè avendo tutti velocità di modulo v , la relazione tra densità particellare $n(\bar{x}, t)$ e flusso è semplicissima:

$$\Phi(\bar{x}, t) = v \cdot n(\bar{x}, t)$$

pertanto possiamo scrivere il numero di neutroni che al tempo t si trovano nel volumetto elementare come:

$$dN = \frac{1}{v} \Phi(\bar{x}, t) \cdot d_2a \cdot dh$$



Consideriamo ora i neutroni che subiscono uno scattering nel punto \bar{x}' al tempo t' . Quale sarà il loro numero per unità di tempo e di volume? come noto questo numero ci è dato dalla *Reaction Rate* ovvero dal prodotto tra flusso e sezione d'urto $\Sigma_s \cdot \Phi(\bar{x}', t')$. Quindi il numero di neutroni dN'_s che subiscono scattering nel volumetto $d_3\bar{x}'$ nell'intervallo di tempo $[t', t'+dt]$ si calcola semplicemente come:

$$dN'_s = \Sigma_s \cdot \Phi(\bar{x}', t') \cdot d_3\bar{x}' \cdot dt$$

Ora, nell'ipotesi di scattering isotropo nel laboratorio, questi neutroni avranno direzioni distribuite uniformemente sull'angolo solido 4π : quanti si dirigeranno verso il punto \bar{x} ? O per meglio dire, quanti (se non subiscono interazione lungo il percorso) attraverseranno l'areola d_2a ? Come al solito occorre fare il rapporto tra tale area e quella della sfera di raggio pari alla distanza $|\bar{x}'-\bar{x}|$, vale a dire che si dirigerà verso l'areola d_2a una frazione data da

$$\text{frac}_1 = \frac{d_2a}{4\pi|\bar{x}'-\bar{x}|^2} = \frac{d_2a}{4\pi r^2}$$

Un'altra domanda che dobbiamo porci è: quando arrivano ad attraversare l'areola? Se partono al tempo t' , arriveranno ad un tempo t'' dato dalla somma del tempo t' e del tempo di volo:

$$t'' = t' + \frac{|\bar{x}'-\bar{x}|}{v}$$

Giriamo la domanda: se vogliamo che attraversino l'areola al tempo t , a che tempo devono partire? Basta girare la formula precedente ponendo $t''=t$:

$$t' = t - \frac{|\bar{x}'-\bar{x}|}{v} = t - \frac{r}{v}$$

Infine, abbiamo precisato *se non subiscono interazione lungo il percorso*. Qual è la probabilità che questo si verifichi? O che è lo stesso, quale frazione dei neutroni partiti al tempo giusto e con la direzione giusta riesce ad arrivare? Questa frazione è data semplicemente da:

$$\text{frac}_2 = \exp[-\Sigma \cdot |\bar{x}'-\bar{x}|] = \exp[-\Sigma \cdot r]$$

Se ora mettiamo insieme tutte queste informazioni possiamo esprimere il numero di neutroni che attraversano l'areola d_2a nell'intervallo di tempo $[t, t+dt]$ in conseguenza di uno scattering subito nel volumetto $d_3\bar{x}'$:

$$\Sigma_s \cdot \Phi\left(\bar{x}', t - \frac{|\bar{x}'-\bar{x}|}{v}\right) \cdot d_3\bar{x}' \cdot dt \cdot \exp[-\Sigma \cdot |\bar{x}'-\bar{x}|] \cdot \frac{d_2a}{4\pi|\bar{x}'-\bar{x}|^2}$$

Collegiamo ora il contributo di questi neutroni al flusso in \bar{x} . Possiamo vedere il problema da due diversi punti di vista:

I - come ben sappiamo, in presenza di un fascio monodirezionale il flusso è pari al numero di neutroni che attraversano l'unità di superficie nell'unità di tempo: poiché i neutroni considerati sono monodirezionali (a meno di infinitesimi) essi danno luogo ad un flusso (vale a dire un contributo al flusso totale)

$$\frac{\Sigma_s \cdot \Phi \left(\bar{x}', t - \frac{|\bar{x}' - \bar{x}|}{v} \right) \cdot d_3 \bar{x}' \cdot dt \cdot \exp[-\Sigma \cdot |\bar{x}' - \bar{x}|] \cdot \frac{d_2 a}{4\pi |\bar{x}' - \bar{x}|^2}}{d_2 a \cdot dt} =$$

$$= \Sigma_s \cdot \Phi \left(\bar{x}', t - \frac{|\bar{x}' - \bar{x}|}{v} \right) \cdot \frac{\exp[-\Sigma \cdot |\bar{x}' - \bar{x}|]}{4\pi |\bar{x}' - \bar{x}|^2} \cdot d_3 \bar{x}'$$

II – Scegliendo un altro punto di vista, quanti sono i cammini percorsi nell'unità di tempo dai neutroni che al tempo t giungono ad attraversare l'areola $d_2 a$? I neutroni che entrano dall'areola $d_2 a$ escono dalla parte opposta dopo un tempo pari a

$$\frac{dh}{v} = \frac{v \cdot dt}{v} = dt$$

quindi fanno parte dei “neutroni contenuti nel volumetto elementare” per un tempo dt . Durante questo tempo ognuno di essi percorre un cammino $v \cdot dt$, e contribuisce quindi con tale quantità al totale dei cammini percorsi di cui sopra. Pertanto la somma dei percorsi compiuti dai neutroni che arrivano sull'areola $d_2 a$ provenienti da $d_3 \bar{x}'$ quando si trovano dentro al volumetto $d_3 \bar{x} = d_2 a \cdot dh = d_2 a \cdot v \cdot dt$ è pari al numero dei neutroni moltiplicato per il percorso (uguale per tutti) che ognuno di essi compie nel tempo dt di permanenza dentro al volumetto:

$$\left[\Sigma_s \cdot \Phi \left(\bar{x}', t - \frac{|\bar{x}' - \bar{x}|}{v} \right) \cdot d_3 \bar{x}' \cdot dt \cdot \exp[-\Sigma \cdot |\bar{x}' - \bar{x}|] \cdot \frac{d_2 a}{4\pi |\bar{x}' - \bar{x}|^2} \right] \times [v \cdot dt]$$

Poiché il flusso è la somma dei percorsi *per unità di tempo e unità di volume*, dividiamo per il volume ed il tempo considerati:

$$\frac{\left[\Sigma_s \cdot \Phi \left(\bar{x}', t - \frac{|\bar{x}' - \bar{x}|}{v} \right) \cdot d_3 \bar{x}' \cdot dt \cdot \exp[-\Sigma \cdot |\bar{x}' - \bar{x}|] \cdot \frac{d_2 a}{4\pi |\bar{x}' - \bar{x}|^2} \right] \times [v \cdot dt]}{[d_2 a \cdot v \cdot dt] \times dt} =$$

$$= \Sigma_s \cdot \Phi \left(\bar{x}', t - \frac{|\bar{x}' - \bar{x}|}{v} \right) \cdot \frac{\exp[-\Sigma \cdot |\bar{x}' - \bar{x}|]}{4\pi |\bar{x}' - \bar{x}|^2} \cdot d_3 \bar{x}'$$

Come nel caso precedente, non resta che sommare tutti i contributi possibili, cioè integrare su tutti i volumetti elementari $d_3 \bar{x}'$, per trovare il flusso totale:

$$\Phi(\bar{x}, t) = \int_{\text{Spazio}} \Sigma_s \cdot \Phi\left(\bar{x}', t - \frac{|\bar{x}' - \bar{x}|}{v}\right) \cdot \frac{\exp[-\Sigma \cdot |\bar{x}' - \bar{x}|]}{4\pi|\bar{x}' - \bar{x}|^2} \cdot d_3\bar{x}'$$

Possiamo riscrivere questa equazione adottando la più comoda notazione con \bar{r} in sostituzione di $\bar{x}' - \bar{x}$ (e quindi $d_3\bar{r} = d_3\bar{x}'$) che adatteremo d'ora in poi

$$\Phi(\bar{x}, t) = \int_{\text{Spazio}} \Sigma_s \cdot \Phi\left(\bar{x} + \bar{r}, t - \frac{r}{v}\right) \cdot \frac{\exp[-\Sigma \cdot r]}{4\pi r^2} \cdot d_3\bar{r}$$

Questa è un'equazione integrale, in cui il flusso è la funzione incognita. Viene generalmente detta EQUAZIONE INTEGRALE DEL TRASPORTO.

II.2 Generalizzazione dell'equazione integrale

Vediamo ora due generalizzazioni. In primo luogo esaminiamo il caso in cui sia presente una sorgente di neutroni isotropa (isotropa come al solito significa che i neutroni vengono emessi con uguale probabilità in tutte le direzioni) e monoenergetica $Q(\bar{x}, t)$. In tal caso dobbiamo considerare il contributo di quei neutroni che, emessi dalla sorgente in $d_3\bar{r}$, giungono direttamente ad attraversare d_2a senza nessuna interazione intermedia. Questi sono detti NEUTRONI DI PRIMO VOLO, ed il flusso che generano è detto FLUSSO DI PRIMO VOLO, od anche FLUSSO VERGINE.

Con procedimento del tutto analogo al precedente troviamo che il contributo dovuto a $d_3\bar{r}$ è

$$Q\left(\bar{x} + \bar{r}, t - \frac{r}{v}\right) \cdot \frac{\exp[-\Sigma \cdot r]}{4\pi r^2} \cdot d_3\bar{r}$$

ed il contributo complessivo si ottiene sempre integrando:

$$\int_{\text{Spazio}} Q\left(\bar{x} + \bar{r}, t - \frac{r}{v}\right) \cdot \frac{\exp[-\Sigma \cdot r]}{4\pi r^2} \cdot d_3\bar{r}$$

Questo va quindi sommato al precedente ottenendo:

$$\Phi(\bar{x}, t) = \int_{\text{Spazio}} \left[\Sigma_s \cdot \Phi\left(\bar{x} + \bar{r}, t - \frac{r}{v}\right) + Q\left(\bar{x} + \bar{r}, t - \frac{r}{v}\right) \right] \cdot \frac{\exp[-\Sigma \cdot r]}{4\pi r^2} \cdot d_3\bar{r}$$

La seconda generalizzazione facile da introdurre è il caso in cui il mezzo non sia omogeneo, bensì le sue proprietà varino con la posizione - cioè, le sezioni d'urto sono funzione di \bar{x} :

$$\Sigma(\bar{x}) = \Sigma_a(\bar{x}) + \Sigma_s(\bar{x})$$

In tal caso la semplice esponenziale si complica un po', ed il termine di attenuazione diviene:

$$\exp\left[-\int_0^1 \Sigma(\bar{x} + \xi \bar{r}) r d\xi\right]$$

ed infine l'equazione più generale assume la forma:

$$\Phi(\bar{x}, t) = \int_{\text{Spazio}} \left[\Sigma_s(\bar{x} + \xi \bar{r}) \cdot \Phi\left(\bar{x} + \bar{r}, t - \frac{r}{v}\right) + Q\left(\bar{x} + \bar{r}, t - \frac{r}{v}\right) \right] \cdot \frac{\exp\left[-\int_0^1 \Sigma(\bar{x} + \xi \bar{r}) r d\xi\right]}{4\pi r^2} \cdot d_3\bar{r}$$

II.3 Approssimazione dell'Equazione integrale con una PDE

Vogliamo ora introdurre un'approssimazione che si rivelerà molto utile. Si consideri nuovamente l'equazione integrale, che riscriviamo

$$\Phi(\bar{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \Sigma_s \cdot \Phi\left(\bar{x} + \bar{r}, t - \frac{r}{v}\right) \cdot \frac{\exp[-\Sigma \cdot r]}{4\pi r^2} \cdot d_3\bar{r}$$

ricordando che essa è valida nel caso di

- neutroni monoenergetici con
- scattering isotropo nel sistema del laboratorio in
- mezzo omogeneo, isotropo, infinito

Sottolineiamo poi che l'integrazione è sulla variabile \bar{r} . Possiamo sviluppare la funzione

$\Phi\left(\bar{x} + \bar{r}, t - \frac{r}{v}\right)$ in serie di McLaurin negli incrementi \bar{r} ed $\frac{r}{v}$ delle variabili \bar{x} e t : prima però

stabiliamo il solito sistema di coordinate sferiche con asse polare parallelo alla direzione \hat{z} e centro nel punto \bar{x} , vale a dire per $\bar{r} = 0$.

In tal caso, le 3 componenti di \bar{r} nelle direzioni dei "vecchi assi" \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} si possono scrivere*:

$$\begin{cases} r_x = r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r_y = r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r_z = r \cos \vartheta \end{cases}$$

Possiamo ora scrivere per lo sviluppo:

$$\Phi\left(\bar{x} + \bar{r}, t - \frac{r}{v}\right) = \Phi(\bar{x}, t) + \left[\frac{\partial\Phi(\bar{x}, t)}{\partial x} r_x + \frac{\partial\Phi(\bar{x}, t)}{\partial y} r_y + \frac{\partial\Phi(\bar{x}, t)}{\partial z} r_z - \frac{\partial\Phi(\bar{x}, t)}{\partial t} \frac{r}{v} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2!} \left[r_x \frac{\partial}{\partial x} + r_y \frac{\partial}{\partial y} + r_z \frac{\partial}{\partial z} - \frac{r}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right]^2 \Phi(\bar{x}, t) + \dots$$

ovvero, con notazione più compatta:

$$\Phi\left(\bar{x} + \bar{r}, t - \frac{r}{v}\right) = \Phi(\bar{x}, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[r_x \frac{\partial}{\partial x} + r_y \frac{\partial}{\partial y} + r_z \frac{\partial}{\partial z} - \frac{r}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right]^n \Phi(\bar{x}, t)$$

Ricordiamo che lo sviluppo in serie di McLaurin contiene infiniti termini, ed è esatto nella misura in cui si tiene conto di tutti i termini. Questo è in genere impossibile. Un'approssimazione che si può tipicamente fare consiste nel troncare questo sviluppo ad un certo ordine, per esempio tenendo i termini fino ad $n = 4$ o 57 o quant'altro, e scartando i rimanenti. Nel caso presente troncheremo al termine $n = 2$. Scriviamolo quindi, introducendo i valori di r_x , r_y ed r_z calcolati poc'anzi per il caso in esame:

$$\Phi\left(\bar{x} + \bar{r}, t - \frac{r}{v}\right) = \Phi(\bar{x}, t) + r \left[\sin\vartheta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial x} + \sin\vartheta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial y} + \cos\vartheta \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right] \Phi(\bar{x}, t) +$$

$$+ \frac{r^2}{2!} \left[\sin^2\vartheta \cos^2\varphi \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sin^2\vartheta \sin^2\varphi \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \cos^2\vartheta \frac{\partial^2}{\partial z^2} +$$

$$+ 2\sin^2\vartheta \sin\varphi \cos\varphi \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + 2\sin\vartheta \cos\vartheta \cos\varphi \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + 2\sin\vartheta \cos\vartheta \sin\varphi \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} -$$

$$- 2\sin\vartheta \cos\varphi \frac{1}{v} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} - 2\sin\vartheta \sin\varphi \frac{1}{v} \frac{\partial^2}{\partial y \partial t} - 2\cos\vartheta \frac{1}{v} \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \Phi(\bar{x}, t) + \dots$$

Non resta che inserire questa espressione per $\Phi\left(\bar{x} + \bar{r}, t - \frac{r}{v}\right)$ nell'integrale. Prima però osserviamo che in coordinate sferiche

* NOTA BENE: riserviamo qui le lettere x, y e z per le 3 componenti di \bar{x} .

$$\int_{\mathfrak{R}^3} \dots d_3\bar{r} \quad \rightarrow \quad \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \dots r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

Consideriamo separatamente i termini di ordine 0, 1 e 2, che chiameremo I_0 , I_1 ed I_2 , riservandoci di sommarli alla fine (l'integrale di una somma è pari alla somma degli integrali dei singoli addendi, come si sa). Cominciamo coll'integrare il termine ordine $n = 0$:

$$I_0 = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Sigma_s \cdot \Phi(\bar{x}, t) \cdot \frac{\exp[-\Sigma \cdot r]}{4\pi r^2} \cdot r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Sigma_s \cdot \Phi(\bar{x}, t) \cdot \frac{\exp[-\Sigma \cdot r]}{4\pi} \cdot dr \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

Poiché $\Phi(\bar{x}, t)$ non dipende dalle variabili di integrazione, può essere portato fuori dall'integrale, insieme a tutte le altre quantità costanti. Troviamo

$$I_0 = \Sigma_s \cdot \Phi(\bar{x}, t) \cdot \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \exp[-\Sigma \cdot r] \cdot dr \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \Sigma_s \cdot \Phi(\bar{x}, t) \int_0^\infty \exp[-\Sigma \cdot r] \cdot dr = \frac{\Sigma_s}{\Sigma} \cdot \Phi(\bar{x}, t)$$

Prima di esaminare i termini successivi, notiamo alcuni integrali che saranno utili:

$$\int_0^\pi \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \int_{-1}^{+1} \mu d\mu = 0; \quad \int_0^\pi \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \frac{2}{3}; \quad \int_0^\pi \sin^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \frac{4}{3}$$

Vediamo quindi i termini successivi, ricordando sempre che le derivate sono calcolate per $r = 0$, cioè in (\bar{x}, t) : pertanto NON DIPENDONO dalle variabili di integrazione r, ϑ, φ ed escono sempre tutte dagli integrali. Il termine $n = 1$, chiamiamolo I_1 , porge:

$$\begin{aligned} \boxed{1} \quad I_1 &= \Phi_x \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_0^\infty r \cdot \exp[-\Sigma \cdot r] \cdot dr \times \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \vartheta \cos \varphi \cdot \sin \vartheta d\vartheta d\varphi + \\ \boxed{2} \quad &+ \Phi_y \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_0^\infty r \cdot \exp[-\Sigma \cdot r] \cdot dr \times \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \vartheta \sin \varphi \cdot \sin \vartheta d\vartheta d\varphi + \\ \boxed{3} \quad &+ \Phi_z \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_0^\infty r \cdot \exp[-\Sigma \cdot r] \cdot dr \times \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos \vartheta \cdot \sin \vartheta d\vartheta d\varphi - \\ \boxed{4} \quad &- \Phi_t \frac{\Sigma_s}{4\pi} \frac{1}{v} \int_0^\infty r \cdot \exp[-\Sigma \cdot r] \cdot dr \times \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \end{aligned}$$

In primo luogo, possiamo eseguire immediatamente l'integrazione su r , trovando

$$\int_0^{\infty} r \cdot \exp[-\Sigma \cdot r] \cdot dr = \frac{1}{\Sigma^2}$$

Peraltro, solo gli integrandi dei termini 1 e 2 dipendono da φ , e precisamente tramite i termini $\cos \varphi$ e $\sin \varphi$ rispettivamente. Pertanto l'integrazione su φ da risultato nullo nei termini 1 e 2 e risultato 2π nei termini 3 e 4. Rimaniamo quindi con:

$$I_1 = \Phi_z \frac{\Sigma_s}{2\Sigma^2} \int_0^{\pi} \cos \vartheta \cdot \sin \vartheta d\vartheta - \Phi_t \frac{\Sigma_s}{2\Sigma^2} \frac{1}{v} \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta$$

Il primo dei due integrali su ϑ si annulla, come visto sopra, il secondo ha come risultato 2, pertanto

$$I_1 = -\frac{\Sigma_s}{v\Sigma^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Analizziamo ora il termine per $n = 2$:

$$I_2 = \left\{ \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi \Phi_{xx} + \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi \Phi_{yy} + \cos^2 \vartheta \Phi_{zz} + \frac{1}{v^2} \Phi_{tt} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \sin^2 \vartheta \sin \varphi \cos \varphi \Phi_{xy} + 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi \Phi_{xz} + 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi \Phi_{yz} - \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \sin \vartheta \cos \varphi \frac{1}{v} \Phi_{xt} - 2 \sin \vartheta \sin \varphi \frac{1}{v} \Phi_{yt} - 2 \cos \vartheta \frac{1}{v} \Phi_{zt} \right] \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \right\} \times \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{r^2}{2} \cdot \exp[-\Sigma \cdot r] \cdot dr$$

L'integrale su r è immediato:

$$\int_0^{\infty} \frac{r^2}{2} \cdot \exp[-\Sigma \cdot r] \cdot dr = \frac{1}{\Sigma^3}$$

Nell'integrazione su φ i termini $\sin \varphi$, $\cos \varphi$ e $\sin \varphi \cos \varphi$ danno risultato nullo, i termini $\sin^2 \varphi$ e $\cos^2 \varphi$ danno risultato π , ed i termini indipendenti da φ danno risultato 2π :

$$I_2 = \frac{\Sigma_s}{4\pi} \frac{1}{\Sigma^3} \pi \int_0^{\pi} \left[\sin^2 \vartheta \Phi_{xx} + \sin^2 \vartheta \Phi_{yy} + 2 \cos^2 \vartheta \Phi_{zz} \right] \sin \vartheta d\vartheta + \\ - \frac{\Sigma_s}{4\pi} \frac{\Phi_{zt}}{v} \frac{2}{\Sigma^3} 2\pi \int_0^{\pi} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta + \frac{\Sigma_s}{4\pi} \frac{\Phi_{tt}}{v^2} \frac{1}{\Sigma^3} 2\pi \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta$$

Ora si eseguano le integrazioni su ϑ : ricordando gli integrali calcolati in precedenza, si trova subito:

$$I_2 = \frac{\Sigma_s}{3} \frac{1}{\Sigma^3} [\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz}] + \frac{\Sigma_s}{\Sigma^3} \frac{\Phi_{tt}}{v^2}$$

Raccogliamo ora tutti i termini, ottenendo:

$$\Phi(\bar{x}, t) = \frac{\Sigma_s}{\Sigma} \cdot \Phi(\bar{x}, t) - \frac{\Sigma_s}{v\Sigma^2} \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\Sigma_s}{3\Sigma^3} [\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz}] + \frac{\Sigma_s}{\Sigma^3} \frac{\Phi_{tt}}{v^2} + \dots$$

Trascurando quindi i termini per n superiore a 2, e mantenendo solo i termini di ordine più basso tra quelli calcolati (vale a dire i termini con le derivate di secondo ordine relativamente allo spazio, e trascurando la derivata seconda rispetto al tempo nei confronti della derivata semplice) otteniamo il risultato definitivo cercato:

$$\Phi(\bar{x}, t) = \frac{\Sigma_s}{\Sigma} \cdot \Phi(\bar{x}, t) - \frac{\Sigma_s}{v\Sigma^2} \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\Sigma_s}{3\Sigma^3} \nabla^2 \Phi(\bar{x}, t)$$

Conviene riordinare un po':

$$\frac{1}{v} \frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{1}{3\Sigma} \nabla^2 \Phi(\bar{x}, t) + \Sigma \left(1 - \frac{\Sigma}{\Sigma_s} \right) \cdot \Phi(\bar{x}, t)$$

Od anche, risolvendo la parentesi tonda (ricordando che $\Sigma - \Sigma_s = \Sigma_a$),

$$\frac{1}{v} \frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{1}{3\Sigma} \nabla^2 \Phi(\bar{x}, t) - \Sigma \frac{\Sigma_a}{\Sigma_s} \cdot \Phi(\bar{x}, t)$$

L'equazione appena trovata è perlopiù utilizzata in situazioni per cui $\Sigma_a \ll \Sigma_s$, per le quali $\Sigma \approx \Sigma_s$, per cui l'equazione diviene:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{1}{3\Sigma_s} \nabla^2 \Phi(\bar{x}, t) - \Sigma_a \Phi(\bar{x}, t)$$

Questa è la ben nota EQUAZIONE DI DIFFUSIONE.

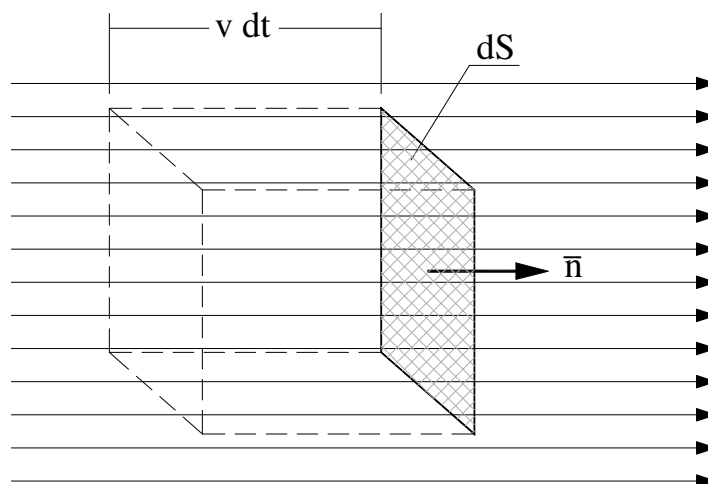
III. LA CORRENTE DI PARTICELLE

III.1 definizione di corrente

Si consideri un fascio di particelle aventi tutte la stessa velocità \mathbf{v} , e si consideri una superficie dS nel percorso del fascio. Esaminiamo separatamente due casi:

- 1) la superficie è perpendicolare al fascio, cioè la sua normale \mathbf{n} ha la direzione di \mathbf{v} ;
- 2) la superficie non è perpendicolare al fascio, bensì la sua normale forma con \mathbf{v} un angolo β .

I - Vediamo il primo caso, rappresentato nella figura seguente. Scegliamo la superficie rettangolare, per comodità, e costruiamo su di essa il parallelepipedo rettangolo avente base dS ed altezza $v \cdot dt$

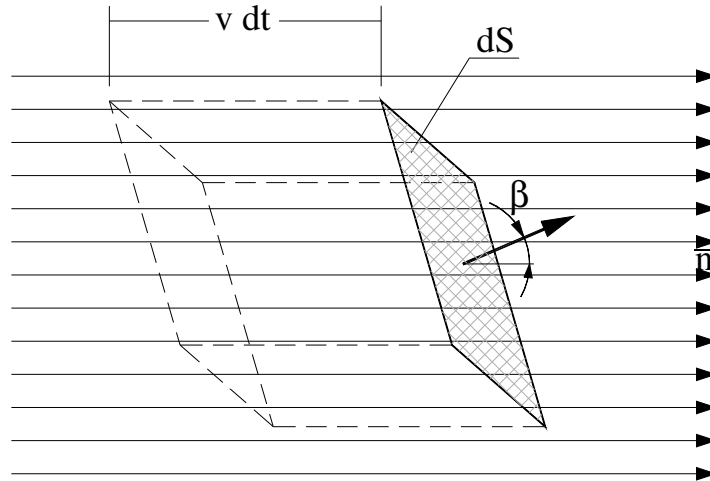


Detta N la densità di particelle per unità di volume, le particelle contenute nel parallelepipedo sono $N \cdot dS \cdot v \cdot dt$. È chiaro che queste sono *tutte e sole* le particelle che nell'intervallo di tempo dt attraversano la superficie dS . Domandiamoci: quante particelle attraversano dS per unità di tempo e per unità di superficie? Facile:

$$\frac{N \cdot dS \cdot v \cdot dt}{dS \cdot dt} = N \cdot v$$

Notiamo subito che questa quantità coincide col flusso nel presente caso di neutroni monoenergetici ed unidirezionali.

II – Secondo caso. Costruiamo adesso il parallelepipedo (non più rettangolo) avente base dS e spigoli lunghi $v \cdot dt$ paralleli a \mathbf{v} :



Il volume di tale solido è $dS \cdot v \cdot dt \cdot \cos\beta$, e pertanto le particelle contenute nel volume sono $N \cdot dS \cdot v \cdot dt \cdot \cos\beta$. Anche in questo caso, sono **tutte e sole** le particelle che attraversano dS nel tempo dt . Ancora una volta calcoliamo le particelle che attraversano dS per unità di tempo e per unità di superficie:

$$\frac{N \cdot dS \cdot v \cdot dt \cdot \cos\beta}{dS \cdot dt} = N \cdot v \cdot \cos\beta$$

Come ricordato $N \cdot v$ coincide col flusso Φ , quindi per questa geometria possiamo dire che la quantità qui sopra è pari al prodotto del flusso per il coseno dell'angolo tra \mathbf{v} e la normale alla superficie.

Notiamo ancora che possiamo esprimere ambedue i risultati ottenuti nel modo seguente:

il numero di particelle che attraversano la superficie, per unità di area e di tempo, è pari a al prodotto scalare della quantità *vettoriale* $N \cdot \mathbf{v}$ per la normale \mathbf{n} alla superficie.

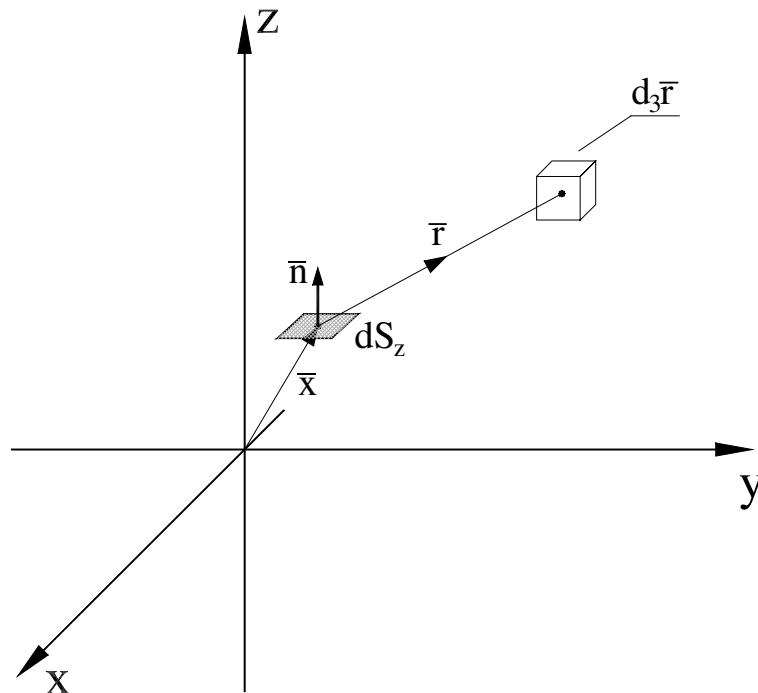
$$(\mathbf{N} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}$$

Generalizziamo questo concetto definendo la densità di corrente di particelle (o corrente di particelle): la densità di corrente di particelle è quel vettore tale che, moltiplicato scalarmente per la normale ad una superficie in un punto, dà il numero di particelle per unità di tempo e di area che attraversano la superficie nell'intorno di tale punto. Indicheremo questo vettore con $\mathbf{J}(\bar{x})$,

ove l'argomento mette in evidenza che in linea generale si tratta di una quantità variabile con la posizione.

III.2 Il caso dei neutroni

Veniamo al caso di nostro primario interesse: i neutroni, e consideriamo neutroni aventi tutti velocità di modulo v ma direzione qualunque. Vogliamo calcolare \mathbf{J} ; possiamo senz'altro calcolare le 3 componenti J_x, J_y e J_z e poi comporre il vettore \mathbf{J} : procederemo in questo modo che è molto pratico. Poiché come sappiamo $J_z = \mathbf{J} \cdot \hat{z}$, per la definizione che abbiamo data di \mathbf{J} , $J_z(\bar{x})$ rappresenta il numero di neutroni che attraversa in \bar{x} una superficie avente normale diretta come \hat{z} , per unità di area e di tempo. Consideriamo una situazione geometrica analoga a quella vista per il calcolo del flusso: consideriamo ora una superficie elementare dS_z avente normale orientata nella direzione \hat{z} , centrata nel punto di coordinate \bar{x} il tutto all'istante t . Come allora, indichiamo con $\bar{x} + \bar{r}$ un punto generico dello spazio, in cui individuiamo un volumetto elementare $d_3\bar{r}$, come in figura:

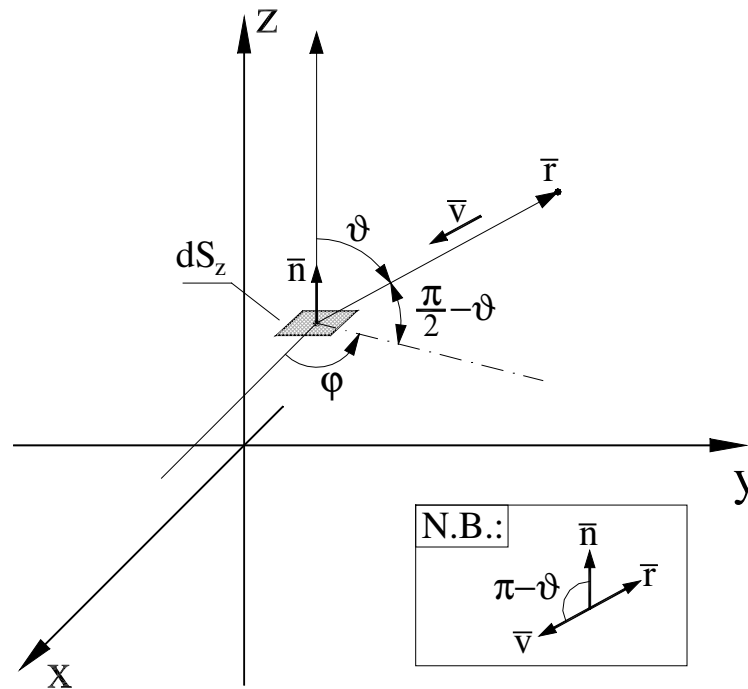


Consideriamo i neutroni che avendo subito l'ultimo scattering all'istante $t - \frac{r}{v}$ nel volume elementare $d_3\bar{r}$ ubicato in $\bar{x} + \bar{r}$, colpiscono all'istante t la superficie elementare dS_z : quale sarà

il numero di tali neutroni che attraversano dS_z per unità di area e di tempo? Poiché i neutroni che stiamo considerando provengono tutti da una determinata direzione, equivalgono ad un fascio collimato e possiamo quindi applicare quanto già sappiamo: la quantità cercata è data dal prodotto del flusso per il coseno dell'angolo tra \mathbf{v} e la normale a dS_z . Ma il flusso dovuto ai neutroni scatterati in $d_3\bar{r}$ lo conosciamo dal capitolo precedente, esso è dato da:

$$\Sigma_s \cdot \Phi\left(\bar{x} + \bar{r}, t - \frac{r}{v}\right) \cdot \frac{\exp[-\Sigma \cdot r]}{4\pi r^2} \cdot d_3\bar{r}$$

ci resta ancora da trovare il coseno di cui sopra. Facciamo un disegno molto schematico (un'aggiunta al precedente):



Vediamo che il coseno cercato è $\cos(\pi - \vartheta) = -\cos \vartheta$. Quindi la quantità cercata è in definitiva:

$$-\cos \vartheta \cdot \Sigma_s \cdot \Phi\left(\bar{x} + \bar{r}, t - \frac{r}{v}\right) \cdot \frac{\exp[-\Sigma \cdot r]}{4\pi r^2} \cdot d_3\bar{r}$$

A questo punto, così come già fatto per il caso del flusso al capitolo precedente, occorre integrare su tutti i possibili volumi elementari, cioè su tutto lo spazio:

$$J_z(\bar{x}, t) = -\int_{\text{Spazio}} \Sigma_s \cdot \Phi\left(\bar{x} + \bar{r}, t - \frac{r}{v}\right) \cdot \frac{\exp[-\Sigma \cdot r]}{4\pi r^2} \cdot \cos \vartheta \cdot d_3\bar{r}$$

III.3 Approssimazione dell'Equazione integrale con una PDE

Si potrebbe ora ripetere il procedimento per le altre due direzioni, ma prima vogliamo introdurre una semplificazione analoga a quella introdotta per il flusso: si sviluppa $\Phi\left(\bar{x} + \bar{r}, t - \frac{r}{v}\right)$ in serie di McLaurin e si tronca al termine di ordine 2, dopodiché si esegue l'integrale. Ricordiamo dal capitolo precedente lo sviluppo in serie del flusso:

$$\Phi\left(\bar{x} + \bar{r}, t - \frac{r}{v}\right) = \Phi(\bar{x}, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[r_x \frac{\partial}{\partial x} + r_y \frac{\partial}{\partial y} + r_z \frac{\partial}{\partial z} - \frac{r}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right]^n \Phi(\bar{x}, t)$$

Ci fermeremo nuovamente ad $n = 2$, facendo in più l'ipotesi di poter trascurare le derivate miste. Beninteso anche qui valgono le relazioni

$$\begin{cases} r_x = r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r_y = r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r_z = r \cos \vartheta \end{cases}$$

Analizziamo il termine per $n = 0$:

$$\begin{aligned} I_0 &= -\frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\bar{x}, t) \cdot \exp[-\Sigma \cdot r] dr \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \\ &= -\frac{\Sigma_s}{4\pi} \Phi(\bar{x}, t) \int_0^{\infty} \exp[-\Sigma \cdot r] dr \cdot \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 0 \end{aligned}$$

Si annulla poiché si annulla l'integrale su ϑ , come già sappiamo. Il termine $n = 1$ porge:

$$\begin{aligned} \boxed{1} \quad I_1 &= -\frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_0^{\infty} r \cdot \exp[-\Sigma \cdot r] \cdot dr \times \left\{ \Phi_x \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \vartheta \cos \varphi \cdot \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi + \right. \\ \boxed{2} \quad &+ \Phi_y \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \vartheta \sin \varphi \cdot \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi + \\ \boxed{3} \quad &+ \Phi_z \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \cos \vartheta \cdot \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi - \\ \boxed{4} \quad &\left. - \frac{\Phi_t}{v} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \right\} \end{aligned}$$

L'integrale su φ nei termini 1 e 2 si annulla, nei termini 3 e 4 dà 2π . Inoltre:

$$\Sigma_s \int_0^{\infty} r \cdot \exp[-\Sigma \cdot r] \cdot dr = \frac{\Sigma_s}{\Sigma^2}$$

rimaniamo dunque con

$$I_1 = -\frac{\Sigma_s}{2\Sigma^2} \left\{ \Phi_z \int_0^{\pi} \cos^2 \vartheta \cdot \sin \vartheta \, d\vartheta - \frac{\Phi_t}{v} \int_0^{\pi} \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \right\}$$

Dei due integrali su ϑ , il primo vale $\frac{2}{3}$, il secondo è nullo, quindi:

$$I_1 = -\frac{\Sigma_s}{3\Sigma^2} \Phi_z$$

Il termine $n = 2$ a sua volta dà:

$$I_2 = -\left\{ \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi \Phi_{xx} + \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi \Phi_{yy} + \cos^2 \vartheta \Phi_{zz} + \frac{1}{v^2} \Phi_{tt} - 2 \cos \vartheta \frac{1}{v} \Phi_{zt} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \sin^2 \vartheta \sin \varphi \cos \varphi \Phi_{xy} + 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi \Phi_{xz} + 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi \Phi_{yz} - \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \sin \vartheta \cos \varphi \frac{1}{v} \Phi_{xt} - 2 \sin \vartheta \sin \varphi \frac{1}{v} \Phi_{yt} \right] \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \right\} \times \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{r^2}{2} \cdot \exp[-\Sigma \cdot r] \cdot dr$$

Solo i primi 5 termini sopravvivono all'integrazione su φ , gli altri si annullano tutti. Resta (avendo svolto anche l'integrale su r)

$$I_2 = -\frac{\Sigma_s}{4\Sigma^3} \int_0^{\pi} \left[\sin^2 \vartheta \Phi_{xx} + \sin^2 \vartheta \Phi_{yy} + 2 \cos^2 \vartheta \Phi_{zz} + 2 \frac{\Phi_{tt}}{v^2} - 4 \cos \vartheta \frac{1}{v} \Phi_{zt} \right] \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta$$

L'integrazione su ϑ annulla i primi quattro termini, rimane dunque

$$I_2 = \frac{2 \Sigma_s}{3 \Sigma^3} \frac{1}{v} \Phi_{zt}$$

Questo è l'unico termine di derivata mista che sopravvive. Se, come convenuto, decidiamo di trascurarlo, troviamo il risultato finale:

$$J_z(\bar{x}, t) = -\frac{\Sigma_s}{3\Sigma^2} \frac{\partial \Phi(\bar{x}, t)}{\partial z}$$

Si può procedere allo stesso modo per le altre due direzioni (avendo l'accortezza di istituire sistemi di coordinate sferiche con l'asse polare orientato rispettivamente nelle direzioni \hat{x} ed \hat{y}), trovando espressioni del tutto analoghe. Possiamo quindi mettere insieme tutto per ricostruire il vettore \mathbf{J} :

$$\mathbf{J}(\bar{x}, t) = J_x(\bar{x}, t) \cdot \hat{x} + J_y(\bar{x}, t) \cdot \hat{y} + J_z(\bar{x}, t) \cdot \hat{z} = -\frac{\Sigma_s}{3\Sigma^2} \left[\frac{\partial \Phi(\bar{x}, t)}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \Phi(\bar{x}, t)}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \Phi(\bar{x}, t)}{\partial z} \hat{z} \right]$$

vale a dire:

$$\mathbf{J}(\bar{x}, t) = -\frac{\Sigma_s}{3\Sigma^2} \nabla \Phi(\bar{x}, t)$$

Questa è nota come LEGGE DI FICK. Spesso chiameremo con la lettera D la costante che moltiplica il gradiente, cioè:

$$\mathbf{J}(\bar{x}, t) = -D \nabla \Phi(\bar{x}, t)$$

dove

$$D = \frac{\Sigma_s}{3\Sigma^2} \cong \frac{1}{3\Sigma_s}$$

Questo è l'aspetto tradizionale della legge di Fick.

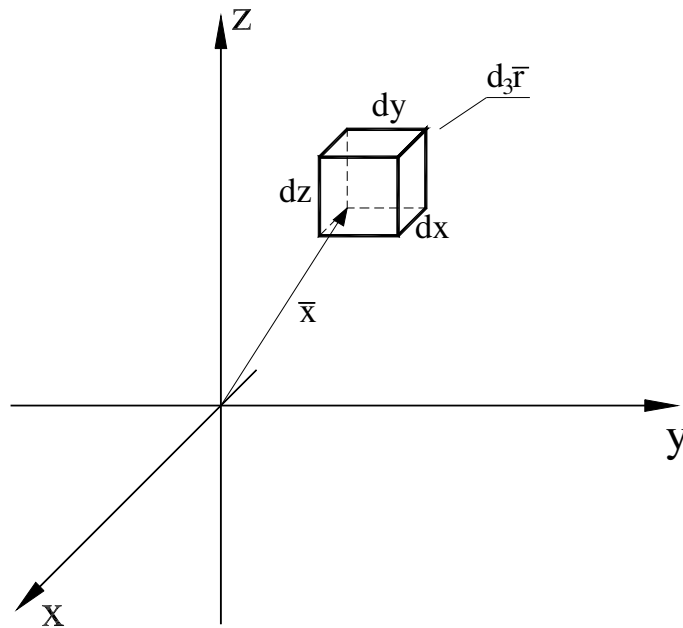
III.4 La divergenza

Ritorniamo al concetto di densità di corrente ed applichiamo al seguente problema: in una zona dello spazio in cui è nota la densità di corrente $\mathbf{J}(\bar{x}, t)$ individuiamo un volumetto elementare $d_3\bar{r}$, e precisamente un esaedro con gli spigoli paralleli agli assi coordinati, per cui $d_3\bar{r} = dx dy dz$. È chiaro che in tale elemento di volume entreranno delle particelle, ed altre ne usciranno: desideriamo conoscere il saldo netto dato dalla differenza tra le particelle uscenti nell'intervallo di tempo dt e le particelle entranti nello stesso intervallo.

La geometria del problema è rappresentata nella figura seguente. Consideriamo prima le facce perpendicolari alla direzione \hat{x} : ognuna di esse ha superficie $dy dz$. Esse si troveranno, rispettivamente, alla coordinata x ed alla coordinata $x + dx$. Calcoliamo il rateo netto entrante nella prima superficie: sappiamo che questa quantità è data dal prodotto scalare del vettore densità di corrente per la normale alla superficie, per l'area della superficie stessa.

La normale alla superficie in questione, entrante nel volume, è proprio \hat{x} , ed il prodotto scalare è pertanto:

$$\mathbf{J}(x, y, z, t) \cdot \hat{x} = J_x(x, y, z, t)$$



quindi troviamo subito che nel tempo dt entrano nel volume attraverso la superficie considerata un numero N_x di particelle dato da:

$$N_x = J_x(x, y, z, t) \cdot dy \cdot dz \cdot dt$$

Consideriamo ora la superficie parallela alla prima ma ubicata ad $x + dx$. Con lo stesso procedimento, troviamo che la normale *uscende* dal volume è \hat{x} , ed il numero N_{x+dx} di particelle che lasciano il volume attraverso questa superficie nell'intervallo di tempo dt è dato da

$$N_{x+dx} = J_x(x + dx, y, z, t) \cdot dy \cdot dz \cdot dt$$

Il totale netto delle perdite attraverso questa coppia di superfici è la differenza tra questi due numeri:

$$N_{x+dx} - N_x = [J_x(x + dx, y, z, t) - J_x(x, y, z, t)] \cdot dy \cdot dz \cdot dt$$

È possibile esprimere diversamente la differenza tra parentesi

$$J_x(x + dx, y, z, t) - J_x(x, y, z, t) = \frac{J_x(x + dx, y, z, t) - J_x(x, y, z, t)}{dx} dx = \frac{\partial J_x(x, y, z, t)}{\partial x} dx$$

infatti il rapporto a secondo membro altro non è che il rapporto incrementale infinitesimo, cioè la derivata. Pertanto, possiamo scrivere

$$N_{x+dx} - N_x = \frac{\partial J_x(x, y, z, t)}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt$$

Possiamo ripetere lo stesso procedimento per le altre due coppie di facce (la coppia di facce normali ad \hat{y} e quella di facce normali a \hat{z}), trovando rispettivamente

$$N_{y+dy} - N_y = \frac{\partial J_y(x, y, z, t)}{\partial y} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt$$

$$N_{z+dz} - N_z = \frac{\partial J_z(x, y, z, t)}{\partial z} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt$$

Ora il numero netto totale N_{Netto} di particelle che nel tempo dt esce dal volume (attraverso tutte le facce) è la somma di questi tre numeri:

$$N_{\text{Netto}} = \left[\frac{\partial J_x(x, y, z, t)}{\partial x} + \frac{\partial J_y(x, y, z, t)}{\partial y} + \frac{\partial J_z(x, y, z, t)}{\partial z} \right] \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt$$

L'operazione tra parentesi è detta divergenza di \mathbf{J} . La divergenza di un vettore \mathbf{A} è definita infatti come

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

(ambedue le notazioni $\nabla \cdot \mathbf{A}$ e $\text{div } \mathbf{A}$ sono utilizzate). Quindi, con notazione più compatta, possiamo scrivere

$$N_{\text{Netto}} = \nabla \cdot \mathbf{J}(x, y, z, t) \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt$$

III.5 Riderivazione dell'equazione della diffusione

Prendiamo in esame un mezzo diffondente in cui sia presente una sorgente di neutroni (sempre monoenergetici), e consideriamo un volumetto elementare come quello della figura precedente. Per questo volumetto possiamo scrivere un'equazione di bilancio, che a parole possiamo esprimere così: “*la variazione nell'intervallo di tempo dt del numero di neutroni contenuti nel volumetto è pari alla differenza tra il numero di neutroni che durante l'intervallo dt si aggiungono (perché entrano o sono creati all'interno del volumetto) ed il numero di neutroni che durante l'intervallo dt spariscono (perché escono o sono assorbiti all'interno del volumetto)*”. Mettiamo questo sotto forma matematica.

1 – Il numero di neutroni contenuti ad un dato istante nel volumetto è data da $n(x, y, z, t) \cdot dx dy dz$, ove n è la densità espressa in neutroni per unità di volume. Pertanto *la variazione nell'intervallo di tempo dt del numero di neutroni contenuti nel volumetto* è data dalla semplice formula:

$$\frac{\partial n(x, y, z, t)}{\partial t} \cdot dx dy dz \cdot dt = \frac{1}{v} \frac{\partial \Phi(x, y, z, t)}{\partial t} \cdot dx dy dz \cdot dt$$

per la nota relazione che lega la densità al flusso.

2 – Nota la sorgente $Q(x, y, z, t)$ (espressa in neutroni generati per unità di volume e unità di tempo), il numero di neutroni che durante l'intervallo dt si aggiungono perché sono creati all'interno del volumetto è dato da

$$Q(x, y, z, t) \cdot dx dy dz \cdot dt$$

3 – Se la sezione d'urto di assorbimento è Σ_a , il numero di neutroni che durante l'intervallo dt spariscono perché sono assorbiti all'interno del volumetto è dato da

$$\Sigma_a \Phi(x, y, z, t) \cdot dx dy dz \cdot dt$$

4 – Non conosciamo separatamente il numero di neutroni entranti e quello di neutroni uscenti, però se è noto $\mathbf{J}(x, y, z, t)$, la differenza tra il numero di neutroni che durante l'intervallo dt si aggiungono perché entrano nel volumetto ed il numero di neutroni che durante tale intervallo spariscono perché escono dal volumetto è data da

$$-\nabla \cdot \mathbf{J}(x, y, z, t) \cdot dx dy dz \cdot dt$$

Componendo tutte queste informazioni (cioè facendo $\boxed{1} = \boxed{2} - \boxed{3} + \boxed{4}$) si trova

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v} \frac{\partial \Phi(x, y, z, t)}{\partial t} dx dy dz dt = \\ & = Q(x, y, z, t) dx dy dz dt - \Sigma_a \Phi(x, y, z, t) dx dy dz dt - \nabla \cdot \mathbf{J}(x, y, z, t) dx dy dz dt \end{aligned}$$

ovvero, semplificando i differenziali:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi(x, y, z, t)}{\partial t} = Q(x, y, z, t) - \Sigma_a \Phi(x, y, z, t) - \nabla \cdot \mathbf{J}(x, y, z, t)$$

Fin qui l'equazione trovata è del tutto generale. Possiamo sfruttare la legge di Fick per eliminare la densità di corrente ed avere un'equazione esclusivamente per il flusso:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi(x, y, z, t)}{\partial t} = Q(x, y, z, t) - \Sigma_a \Phi(x, y, z, t) - \nabla \cdot [-D \nabla \Phi(x, y, z, t)]$$

e quindi, sapendo che $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi(x, y, z, t)}{\partial t} = Q(x, y, z, t) - \Sigma_a \Phi(x, y, z, t) + D \nabla^2 \Phi(x, y, z, t)$$

Questa equazione, che coincide con l'equazione di diffusione, è valida nella misura in cui vale la legge di Fick.

III.6 Condizioni di validità dell'approssimazione di diffusione

Nella prima derivazione dell'equazione di diffusione avevamo fatto l'approssimazione di troncatura lo sviluppo in serie di McLaurin al termine di ordine 2. Analoga approssimazione abbiamo fatto nel derivare la legge di Fick (con in più la condizione di trascurare le derivate miste. Non è veramente una differenza, perché i termini con le derivate miste si erano annullati da soli nell'integrazione che ha portato all'equazione di diffusione). In sostanza i due risultati corrispondono alle stesse approssimazioni. Ulteriore conferma ci viene dal fatto che ricaviamo ancora l'equazione di diffusione dall'equazione *esatta* di bilancio, introducendo in questa la legge di Fick per legare la corrente al flusso. In cosa consiste, o cosa comporta, l'approssimazione di trascurare i termini (e quindi le derivate) degli ordini superiori?

Facciamo una breve digressione, riferiamoci ad una curva nel piano. Se tale curva è una retta, tutti i termini del suo sviluppo di McLaurin di ordine superiore al primo sono identicamente nulli.

Se la curva è una parabola, sono nulli tutti i termini di ordine superiore al secondo. Ambedue queste curve sono perfettamente rappresentate se utilizzo un sviluppo di McLaurin troncato al secondo ordine. Se abbiamo una cubica? Per essere perfettamente rappresentata necessiterebbe del termine di terzo ordine e così via. È chiaro che un polinomio di grado 237 è rappresentato da uno sviluppo di McLaurin di ordine 2 molto, ma molto meno bene di un polinomio del quarto grado che a sua volta non è rappresentato perfettamente come lo sarebbe un polinomio del secondo grado. Tutto questo per dire: l'approssimazione è tanto migliore quanto più "piatta" è la curva, cioè quanto meno rapidamente varia al variare di x . Torniamo al nostro caso: qui abbiamo una complicazione in più, le 4 dimensioni. Però abbiamo un aiutino, il termine $\exp[-\Sigma \cdot r]$ che compare negli integrali visti (sia per la diffusione che per Fick) che ci dice: attenzione, quando il termine $\Sigma \cdot r$ cresce oltre un certo limite (diciamo per sicurezza un valore $4 \div 5$) il contributo all'integrale diviene trascurabile. In altre parole solo la porzione di spazio tale che $r < \frac{4 \div 5}{\Sigma}$ (più o meno) contribuisce all'integrale. Ci basta quindi che l'approssimazione dello sviluppo di McLaurin sia buona entro quella distanza. In definitiva possiamo dire (un po' a spanne, ma con senso fisico) che l'approssimazione è buona per quei punti \bar{x} tali che nel loro intorno di ampiezza $4 \div 5$ volte $\lambda = \frac{1}{\Sigma}$ il flusso vari poco, o più matematicamente soddisfi la condizione

$$\frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \ll \frac{1}{\lambda}$$

Questo è il limite dell'approssimazione di diffusione (e naturalmente anche della legge di Fick). Quand'è che il flusso soddisfa questo requisito? Certamente non lo soddisfa nelle immediate vicinanze di una frontiera tra due materiali dalle caratteristiche nucleari significativamente diverse. Oppure se l'assorbimento è molto marcato. Prenderemo come regola grossolana ma pratica la seguente:

- lontano (cioè almeno $4 \div 5$ volte $\frac{1}{\Sigma}$) da frontiere del mezzo diffondente; e
- assorbimento piccolo rispetto allo scattering: $\Sigma_a \ll \Sigma_s$ (che equivale a dire $\Sigma \cong \Sigma_s$).

Infine, vogliamo considerare un'altra approssimazione introdotta inizialmente: si è supposto lo scattering isotropo *nel sistema del laboratorio* (mentre sappiamo che è isotropo solo nel sistema del centro di massa). Questo è tanto più vero quanto più grande è la massa dei centri di scattering. In realtà la componente lungo la direzione iniziale di avvicinamento della velocità dopo l'urto non è mediamente nulla bensì sempre positiva: si dice che vi è una PERMANENZA DELLA VELOCITÀ. Come sarebbe cambiato il risultato se avessimo tenuto conto dell'anisotropia, o in altri

termini di tale permanenza della velocità a seguito dello scattering? Si capisce immediatamente che essa comporta valore più elevato di D . Ci viene in aiuto la CORREZIONE D'ANGOLO: non lo dimostreremo qui, ma si trova che (sempre per $\Sigma_a \ll \Sigma_s$)

$$D = \frac{1}{3\Sigma_s(1-\langle\mu\rangle)}$$

dove $\langle\mu\rangle$ indica il coseno medio di scattering nel sistema del laboratorio (sappiamo che nel baricentro sarebbe NULLO). La quantità a denominatore ha un nome, sezione d'urto macroscopica di trasporto, generalmente indicata come Σ_{tr} :

$$\Sigma_{tr} = \Sigma_s(1-\langle\mu\rangle)$$

ovvero, scriveremo il coefficiente di diffusione come

$$D = \frac{1}{3\Sigma_{tr}}$$

Accenniamo appena ad un'altra correzione. Nel derivare l'equazione di diffusione e la legge di Fick abbiamo troncato lo sviluppo di McLaurin abbastanza presto, quindi implicitamente considerato l'assorbimento molto piccolo, come discusso poco sopra. Se vogliamo tenere conto della finitezza dell'assorbimento dobbiamo apportare ancora la CORREZIONE DEL TRASPORTO, scrivendo

$$D = \frac{1}{3\Sigma_{tr}} \times \frac{1}{1 - \frac{4}{5} \frac{\Sigma_a}{\Sigma} + \frac{\langle\mu\rangle}{1-\langle\mu\rangle} \frac{\Sigma_a}{\Sigma} + \dots}$$

Non ci serviremo ulteriormente di quest'ultima correzione.

pagina intenzionalmente vuota

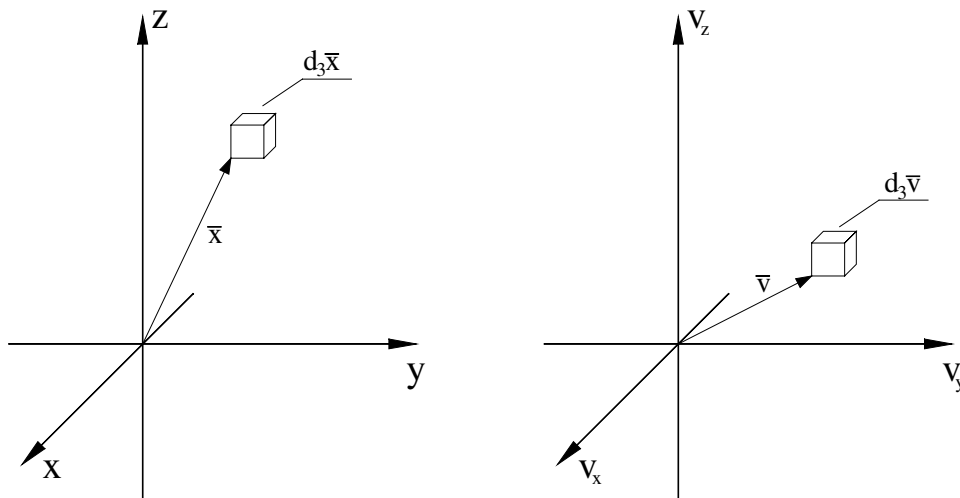
IV. LA TEORIA DEL TRASPORTO

IV.1 Flusso e corrente

Ricordiamo che, considerando particelle monoenergetiche, il flusso è il prodotto della densità numerica (cioè: numero di particelle per unità di volume) per il modulo della velocità

$$\Phi(\bar{x}, t) = n(\bar{x}, t) \cdot v$$

Se abbiamo invece particelle non monoenergetiche, la velocità non è più una quantità univoca ed occorre quindi trovare un diverso modo di definire il flusso. Definiamo allora la quantità $n(\bar{x}, \bar{v}, t)$, nel seguente modo: $n(\bar{x}, \bar{v}, t) d_3\bar{x} d_3\bar{v}$ rappresenta il numero di particelle che, all'istante t , si trovano nel volume $d_3\bar{x}$ dello spazio fisico intorno al punto \bar{x} ed hanno velocità compresa nel volume $d_3\bar{v}$ dello spazio delle velocità intorno a \bar{v} , come rappresentato in figura:



Vale a dire: una particella viene contata se si trova nel volumetto $d_3\bar{x}$ **ED INOLTRE** ha una velocità compresa nel volumetto $d_3\bar{v}$ ¹.

Consideriamo ora i neutroni aventi velocità nell'intervallo tridimensionale (infinitesimo) $d_3\bar{v}$ intorno a \bar{v} : possiamo senz'altro considerare il flusso dovuto ai soli neutroni di questo tipo, che chiameremo quindi $\Phi(\bar{x}, \bar{v}, t)$.

¹ In che relazione è la quantità $n(\bar{x}, \bar{v}, t)$ con la funzione di distribuzione?

Poiché consideriamo solo neutroni aventi una determinata velocità, possiamo applicare quello che già sappiamo, e scrivere senz'altro:

$$\Phi(\bar{x}, \bar{v}, t) = n(\bar{x}, \bar{v}, t) \cdot v$$

Per ottenere il flusso totale basta ora integrare su tutte le velocità:

$$\Phi(\bar{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(\bar{x}, \bar{v}, t) d_3 \bar{v} = \int_{\mathbb{R}^3} v \times n(\bar{x}, \bar{v}, t) d_3 \bar{v}$$

Possiamo pensare ad un approccio analogo anche per la corrente: infatti se consideriamo ancora i neutroni aventi velocità nell'intervallo tridimensionale (infinitesimo) $d_3 \bar{v}$ intorno a \bar{v} , possiamo anche qui considerare la corrente dovuto ai soli neutroni di questo tipo, che applicando la regola già nota per i fasci unidirezionali di neutroni monoenergetici possiamo scrivere

$$\mathbf{J}(\bar{x}, \bar{v}, t) = n(\bar{x}, \bar{v}, t) \bar{v}$$

ed integrando su tutte le velocità

$$\mathbf{J}(\bar{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{J}(\bar{x}, \bar{v}, t) d_3 \bar{v} = \int_{\mathbb{R}^3} \bar{v} n(\bar{x}, \bar{v}, t) d_3 \bar{v}$$

Notiamo che si può anche scomporre la velocità in modulo e direzione:

$$\bar{v} = v \boldsymbol{\Omega}$$

ove $\boldsymbol{\Omega}$ è il versore della direzione, e in tal caso abbiamo la seguente relazione:

$$\mathbf{J}(\bar{x}, \bar{v}, t) = n(\bar{x}, \bar{v}, t) v \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega} \Phi(\bar{x}, \bar{v}, t)$$

Possiamo anche scrivere le tre quantità viste in termini di modulo e direzione della velocità::

$$n(\bar{x}, v, \boldsymbol{\Omega}, t)$$

$$\Phi(\bar{x}, v, \boldsymbol{\Omega}, t) = n(\bar{x}, v, \boldsymbol{\Omega}, t) v$$

$$\mathbf{J}(\bar{x}, v, \boldsymbol{\Omega}, t) = n(\bar{x}, v, \boldsymbol{\Omega}, t) v \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega} \Phi(\bar{x}, v, \boldsymbol{\Omega}, t)$$

Se poi osserviamo che energia cinetica E e modulo della velocità sono legati biunivocamente, possiamo scrivere le stesse tre quantità anche come segue:

$$n(\bar{x}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$$

$$\Phi(\bar{x}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) = n(\bar{x}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) v$$

$$\mathbf{J}(\bar{x}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) = n(\bar{x}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) v \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega} \Phi(\bar{x}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$$

La quantità $\Phi(\bar{x}, E, \Omega, t)$ o $\Phi(\bar{x}, v, \Omega, t)$ viene usualmente chiamata FLUSSO ANGOLARE.

Quando le quantità sono espresse in questi termini, scriveremo:

$$\Phi(\bar{x}, t) = \int_0^{\infty} \int_{4\pi} \Phi(\bar{x}, E, \Omega, t) dE d_2\Omega$$

$$\mathbf{J}(\bar{x}, t) = \int_0^{\infty} \int_{4\pi} \mathbf{J}(\bar{x}, E, \Omega, t) dE d_2\Omega$$

Infine possiamo considerare anche quantità integrate sull'angolo, ma dipendenti dall'energia:

$$\Phi(\bar{x}, E, t) = \int_{4\pi} \Phi(\bar{x}, E, \Omega, t) d_2\Omega$$

$$\mathbf{J}(\bar{x}, E, t) = \int_{4\pi} \mathbf{J}(\bar{x}, E, \Omega, t) d_2\Omega$$

IV.2 Equazione integro-differenziale “di Boltzmann”

Vogliamo ora trovare un'equazione di evoluzione per il flusso angolare. Tentiamo di nuovo un approccio di bilancio, come visto nella seconda derivazione dell'equazione della diffusione: la variazione nel tempo dt del numero di neutroni contenuti nel volume elementare (dello spazio delle fasi, attenzione!) $d_3\bar{x} d_3\bar{v}$ sarà data dalla differenza tra i neutroni che si aggiungono nell'unità di tempo meno quelli che si sottraggono. Detto così è piuttosto vago: consideriamo quindi un volumetto $d_3\bar{x} d_3\bar{v}$ ed esaminiamo quali processi portano neutroni e quali ne sottraggono.

- a) Un neutrone che si trova in $d_3\bar{x} d_3\bar{v}$ ha tre modi di sparire dal quel volumetto:
 - b1) viene assorbito (e sparisce dal sistema)
 - b2) avendo velocità in $d_3\bar{v}$ si sposta (ed esce da $d_3\bar{x}$)
 - b3) trovandosi in $d_3\bar{x}$ cambia velocità (e quindi esce da $d_3\bar{v}$)
- b) Allo stesso tempo un neutrone che non si trova inizialmente in $d_3\bar{x} d_3\bar{v}$ ha tre modi di apparire nel volumetto:
 - b1) viene generato in $d_3\bar{x} d_3\bar{v}$ (attenzione, generato IN QUEL LUOGO e CON QUELLA VELOCITÀ)
 - b2) avendo velocità in $d_3\bar{v}$, a seguito dei suoi spostamenti entra in $d_3\bar{x}$
 - b3) trovandosi in $d_3\bar{x}$, a seguito di un'accelerazione viene ad assumere velocità in $d_3\bar{v}$

I neutroni non sono soggetti a forze esterne diverse dall'interazione forte, che è a brevissimo raggio (trascureremo senz'altro la gravità), quindi gli eventi in a3) e b3) possono avvenire solo a seguito di scattering.

Sulla base delle considerazioni fatte, scriveremo un'equazione di bilancio:

$$\frac{\partial}{\partial t} n(\bar{x}, \bar{v}, t) d_3 \bar{x} d_3 \bar{v} dt = b1 - a1 + (b2 - a2) + (b3 - a3)$$

Il motivo per cui abbiamo raggruppato b2) ed a2), è il solito: è più facile e comodo scrivere la differenza che non i singoli termini. Qualcosa di simile anche per b3) ed a3).

Scriveremo d'ora in poi le nostre equazioni in termini delle variabili E ed Ω , che sono le più usuali nel trasporto dei neutroni. Consideriamo il termine a primo membro e scriviamolo in termini del flusso angolare:

$$\frac{\partial}{\partial t} n(\bar{x}, \bar{v}, t) d_3 \bar{x} d_3 \bar{v} dt \Rightarrow \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\bar{x}, E, \Omega, t) d_3 \bar{x} dE d_2 \Omega dt$$

Termine b1: è l'eventuale termine di sorgente. Detta $S(\bar{x}, E, \Omega, t)$ la generazione di neutroni per unità di tempo e di volume (intendendo sempre volume *dello spazio delle fasi!*) avremo

$$b1 = S(\bar{x}, E, \Omega, t) d_3 \bar{x} dE d_2 \Omega dt$$

Termine a1: è il termine di assorbimento, quindi sarà pari alla sezione d'urto macroscopica di assorbimento (che in linea generale dipenderà dall'energia e dalla posizione) moltiplicata per il flusso angolare, cioè la reaction rate relativa ai soli neutroni di energia e direzione specificata:

$$a1 = \Sigma_a(\bar{x}; E) \Phi(\bar{x}, E, \Omega, t) d_3 \bar{x} dE d_2 \Omega dt$$

Termine b2-a2: tale differenza è il solito termine di streaming, pari alla divergenza della corrente. Dobbiamo però riferirlo sempre *ai soli neutroni della energia e direzione specificate*: vogliamo infatti la differenza fra ingressi e uscite dal volumetto $d_3 \bar{x}$, LIMITATAMENTE ai neutroni che si trovano in $dE d_2 \Omega$ (cioè: avendo già la velocità giusta entrano in $d_3 \bar{x}$!). Dobbiamo quindi considerare la corrente *angolare*:

$$b2 - a2 = -\nabla \cdot \mathbf{J}(\bar{x}, E, \Omega, t) d_3 \bar{x} dE d_2 \Omega dt$$

Considerando però che $\mathbf{J}(\bar{x}, E, \Omega, t) = \Omega \Phi(\bar{x}, E, \Omega, t)$ e che in questo punto di vista la direzione della velocità è una **VARIABILE INDIPENDENTE** (quindi trasparente all'operazione di derivazione spaziale) possiamo scrivere in definitiva

$$b2 - a2 = -\Omega \cdot \nabla \Phi(\bar{x}, E, \Omega, t) d_3 \bar{x} dE d_2 \Omega dt$$

Termine b3-a3: Questo termine riguarda quei neutroni che TROVANDOSI in $d_3\bar{x}$ cambiano la loro velocità, quindi entrano/escono da $dE d_2\Omega$. Questo può avvenire, lo abbiamo detto, solo a seguito di scattering. Ricordiamo che i neutroni che, trovandosi ad una generica energia in $(E_g, E_g + dE)$ e con una generica direzione in $(\Omega_g, \Omega_g + d_2\Omega)$, subiscono un evento di scattering sono dati dall'opportuna reaction rate, che è

$$\Sigma_s(\bar{x}; E_g) \Phi(\bar{x}, E_g, \Omega_g, t) d_3\bar{x} dE d_2\Omega dt$$

Due sono i fenomeni di interesse per noi:

1. i neutroni (sempre in $d_3\bar{x}$) che partiti da (un intorno di) E' ed Ω' , subendo uno scattering nel tempo dt si vengono a trovare dopo l'urto entro il volumetto $dE d_2\Omega$ in esame (e questo è il contributo b3);
2. i neutroni (sempre in $d_3\bar{x}$) che entro il volumetto $dE d_2\Omega$ in esame subiscono nel tempo dt uno scattering che li porta in (un intorno di) E' ed Ω' (e questo è il contributo a3).

Cominciamo dal primo. Se un neutrone subisce uno scattering quando ha energia e direzione (E', Ω') , con quale probabilità finisce nell'intorno $dE d_2\Omega$ di (E, Ω) ? Definiamo la densità di probabilità $f_{E,\Omega}(E, \Omega) = \Pi(E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega; \bar{x})$ (potrebbe in generale essere funzione della posizione. Nel seguito non terremo conto di questa possibilità, poiché considereremo solo mezzi omogenei). La probabilità cercata si scrive quindi

$$\Pi(E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega; \bar{x}) dE d_2\Omega$$

Perciò: nel tempo dt , i neutroni che entro $d_3\bar{x}$, trovandosi nell'intorno $dE' d_2\Omega'$ di (E', Ω') scatterano verso l'intorno $dE d_2\Omega$ di (E, Ω) sono :

$$\Sigma_s(\bar{x}; E') \Phi(\bar{x}, E', \Omega', t) d_3\bar{x} dE' d_2\Omega' dt \times \Pi(E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega; \bar{x}) dE d_2\Omega$$

Vogliamo però TUTTI i neutroni che, nel tempo dt ed entro $d_3\bar{x}$, scatterano verso l'intorno $dE d_2\Omega$ di (E, Ω) , DA QUALUNQUE ENERGIA SIANO PARTITI. Dobbiamo quindi integrare su $dE' d_2\Omega'$:

$$\left\{ \int_0^\infty \int_{4\pi} \Sigma_s(\bar{x}; E') \Phi(\bar{x}, E', \Omega', t) \Pi(E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega; \bar{x}) dE' d_2\Omega' \right\} d_3\bar{x} dt dE d_2\Omega$$

Notiamo che in questo modo contiamo anche gli scattering da $dE d_2\Omega$ a se stesso, quindi è il termine b3 più qualcosa: ne riparlamo dopo aver visto il punto 2.

Punto 2: possiamo ripetere il ragionamento e trovare i neutroni che nel tempo dt , entro $d_3\bar{x}$, trovandosi nell'intorno $dE d_2\Omega$ di (E, Ω) scatterano verso l'intorno $dE' d_2\Omega'$ di (E', Ω') :

$$\Sigma_s(\bar{x}; E) \Phi(\bar{x}, E, \Omega, t) d_3\bar{x} dE d_2\Omega dt \times \Pi(E \rightarrow E', \Omega \rightarrow \Omega'; \bar{x}) dE' d_2\Omega'$$

e per avere tutti i neutroni che scatterano fuori dall'intorno $dE d_2\Omega$ di (E, Ω) , indipendentemente da dove finiscono, dobbiamo di nuovo integrare su $dE' d_2\Omega'$

$$\left\{ \int_0^\infty \int_{4\pi} \Sigma_s(\bar{x}; E) \Phi(\bar{x}, E, \Omega, t) \Pi(E \rightarrow E', \Omega \rightarrow \Omega'; \bar{x}) dE' d_2\Omega' \right\} d_3\bar{x} dt dE d_2\Omega$$

Facciamo due osservazioni

- Notiamo che in questo modo contiamo anche gli scattering da $dE d_2\Omega$ a se stesso, quindi è il termine a_3 più qualcosa, e questo qualcosa è identico al “qualcosa più di b_3 ” trovato prima: è chiaro che se facciamo la differenza tra l'integrale precedente e questo, il “qualcosa in più” si cancella e ci resta esattamente $b_3 - a_3$.
- Nell'ultimo integrale solo la densità di probabilità $\Pi(E \rightarrow E', \Omega \rightarrow \Omega'; \bar{x})$ dipende da E' ed Ω' , le altre quantità dipendono invece da E ed Ω e quindi si possono portar fuori dall'integrale:

$$\left\{ \int_0^\infty \int_{4\pi} \Pi(E \rightarrow E', \Omega \rightarrow \Omega'; \bar{x}) dE' d_2\Omega' \right\} \Sigma_s(\bar{x}; E) \Phi(\bar{x}, E, \Omega, t) d_3\bar{x} dt dE d_2\Omega$$

È palese che quest'ultimo integrale è pari ad 1, no? Quindi restiamo con:

$$\Sigma_s(\bar{x}; E) \Phi(\bar{x}, E, \Omega, t) d_3\bar{x} dt dE d_2\Omega$$

e mettendo i due integrali insieme otteniamo il termine $b_3 - a_3$ cercato:

$$\left\{ \int_0^\infty \int_{4\pi} \Sigma_s(\bar{x}; E') \Phi(\bar{x}, E', \Omega', t) \Pi(E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega; \bar{x}) dE' d_2\Omega' - \Sigma_s(\bar{x}; E) \Phi(\bar{x}, E, \Omega, t) \right\} d_3\bar{x} dt dE d_2\Omega$$

che rappresenta lo “streaming nello spazio delle velocità”. Bene, possiamo mettere tutto assieme

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\bar{x}, E, \Omega, t) d_3\bar{x} dE d_2\Omega dt = S(\bar{x}, E, \Omega, t) d_3\bar{x} dE d_2\Omega dt - \\ & - \Sigma_a(\bar{x}; E) \Phi(\bar{x}, E, \Omega, t) d_3\bar{x} dE d_2\Omega dt - \Omega \cdot \nabla \Phi(\bar{x}, E, \Omega, t) d_3\bar{x} dE d_2\Omega dt \\ & + \left\{ \int_0^\infty \int_{4\pi} \Sigma_s(\bar{x}; E') \Phi(\bar{x}, E', \Omega', t) \Pi(E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega; \bar{x}) dE' d_2\Omega' - \Sigma_s(\bar{x}; E) \Phi(\bar{x}, E, \Omega, t) \right\} d_3\bar{x} dt dE d_2\Omega \end{aligned}$$

Facciamo altri tre passi:

- osserviamo che $\Sigma_a(\bar{x}; E) + \Sigma_s(\bar{x}; E) = \Sigma(\bar{x}; E)$, e raccogliamo i due termini relativi
- dividiamo tutto per $d_3\bar{x} dE d_2\Omega dt$
- utilizziamo la notazione (molto usuale nel trasporto dei neutroni)

$$\Sigma_s(\bar{x}; E') \Pi(E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega; \bar{x}) \rightarrow \Sigma_s(E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega; \bar{x})$$

Troviamo così

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\bar{x}, E, \Omega, t) = & S(\bar{x}, E, \Omega, t) - \Sigma(\bar{x}; E) \Phi(\bar{x}, E, \Omega, t) - \Omega \cdot \nabla \Phi(\bar{x}, E, \Omega, t) \\ & + \int_0^{\infty} \int_{4\pi} \Sigma_s(E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega; \bar{x}) \Phi(\bar{x}, E', \Omega', t) dE' d_2\Omega' \end{aligned}$$

Questa è l'equazione integro-differenziale del trasporto per neutroni, detta anche equazione di Boltzmann per neutroni, perché riordinandola troviamo una cosa assai simile all'equazione di Boltzmann senza forza (si tenga conto che i neutroni, appunto, non sono soggetti a forze, eccetto l'interazione nucleare forte, tenuta in conto nell'integrale di collisione b3-a3):

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\bar{x}, E, \Omega, t) + \Omega \cdot \nabla \Phi(\bar{x}, E, \Omega, t) + \Sigma(\bar{x}; E) \Phi(\bar{x}, E, \Omega, t) = & S(\bar{x}, E, \Omega, t) + \\ & + \int_0^{\infty} \int_{4\pi} \Sigma_s(E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega; \bar{x}) \Phi(\bar{x}, E', \Omega', t) dE' d_2\Omega' \end{aligned}$$

ovvero, in termini della densità angolare $n(\bar{x}, \bar{v}, t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} n(\bar{x}, E, \Omega, t) + \bar{v} \cdot \nabla n(\bar{x}, E, \Omega, t) = & S(\bar{x}, E, \Omega, t) - v \Sigma(\bar{x}; E) n(\bar{x}, E, \Omega, t) + \\ & + \int_0^{\infty} \int_{4\pi} v' \Sigma_s(E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega; \bar{x}) n(\bar{x}, E', \Omega', t) dE' d_2\Omega' \end{aligned}$$

pagina intenzionalmente vuota

V. APPROSSIMAZIONI DELLA TEORIA DEL TRASPORTO: IL CASO

STAZIONARIO

L'equazione del trasporto nel caso stazionario si scrive come segue:

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \Phi(\bar{x}, E, \boldsymbol{\Omega}) + \Sigma(\bar{x}; E) \Phi(\bar{x}, E, \boldsymbol{\Omega}) = S(\bar{x}, E, \boldsymbol{\Omega}) + \int_0^{\infty} \int_{4\pi} \Sigma_s(E' \rightarrow E, \boldsymbol{\Omega}' \rightarrow \boldsymbol{\Omega}; \bar{x}) \Phi(\bar{x}, E', \boldsymbol{\Omega}') dE' d_2\boldsymbol{\Omega}'$$

Ancora una volta consideriamo un mezzo omogeneo (oltre che isotropo, come sempre), in cui cioè le sezioni d'urto sono indipendenti dalla posizione, e quindi l'equazione si semplifica ancora un po', ed a questa faremo riferimento in questo capitolo:

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \Phi(\bar{x}, E, \boldsymbol{\Omega}) + \Sigma(E) \Phi(\bar{x}, E, \boldsymbol{\Omega}) = S(\bar{x}, E, \boldsymbol{\Omega}) + \int_0^{\infty} \int_{4\pi} \Sigma_s(E' \rightarrow E, \boldsymbol{\Omega}' \rightarrow \boldsymbol{\Omega}) \Phi(\bar{x}, E', \boldsymbol{\Omega}') dE' d_2\boldsymbol{\Omega}'$$

Vediamo dunque alcuni casi semplificati.

V.1 Neutroni monoenergetici

Cominceremo col considerare neutroni monoenergetici (tuttavia vi è una grande differenza con la diffusione: ora **teniamo conto** della direzione di volo $\boldsymbol{\Omega}$).

Ora, non essendovi dipendenza dal tempo, questa è stata semplicemente eliminata dal novero delle variabili nell'equazione qui sopra, cosa lecita in quanto il flusso e le altre quantità che compaiono nell'equazione del trasporto non sono quantità differenziali rispetto al tempo: ad esempio non ha nessun senso parlare della quantità $\Phi(\bar{x}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) dt$, che non ha palesemente alcun significato fisico. Assai diverso è invece il caso dell'energia: infatti sia il flusso che la sorgente sono quantità differenziali rispetto all'energia (cioè contengono al loro interno una densità di probabilità rispetto alla v.a. "energia"). È errato dire che nel caso in esame non vi è dipendenza dall'energia, al contrario, la dipendenza è fortissima, diciamo pure esclusiva - **l'energia è unica**, diciamola E_0 ; o meglio ancora: tutta la densità di probabilità, relativamente all'energia, è condensata sul valore E_0 , cioè È UNA DELTA DI DIRAC. Modificheremo dunque il flusso così:

$$\Phi(\bar{x}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \rightarrow \Phi(\bar{x}, \boldsymbol{\Omega}) \delta(E - E_0)$$

Naturalmente perché possa verificarsi la situazione in esame (indipendenza dal tempo e soprattutto energia che non cambia) occorrono certamente le seguenti due condizioni:

- la sorgente deve essere indipendente dal tempo e **monocromatica**

$$S(\bar{x}, E, \Omega, t) = S(\bar{x}, \Omega) \delta(E - E_0)$$

- lo scattering deve essere tale da non cambiare l'energia del neutrone scatterante

$$\Pi(E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) = \Pi(\Omega' \rightarrow \Omega) \delta(E - E')$$

Cominciamo con il considerare l'effetto di quest'ultima condizione sull'integrale di scattering

$$\int_0^{\infty} \int_{4\pi} \Sigma_s(E') \Pi(\Omega' \rightarrow \Omega) \delta(E - E') \Phi(\bar{x}, E', \Omega') dE' d_2\Omega' = \int_{4\pi} \Sigma_s(E) \Pi(\Omega' \rightarrow \Omega) \Phi(\bar{x}, E, \Omega') d_2\Omega'$$

Introducendo anche le espressioni per il flusso e la sorgente otteniamo infine la seguente equazione del trasporto, valida per il caso considerato:

$$\begin{aligned} \Omega \cdot \nabla \Phi(\bar{x}, \Omega) \delta(E - E_0) + \Sigma(E) \Phi(\bar{x}, \Omega) \delta(E - E_0) = \\ S(\bar{x}, \Omega) \delta(E - E_0) + \int_{4\pi} \Sigma_s(E) \Pi(\Omega' \rightarrow \Omega) \Phi(\bar{x}, \Omega') \delta(E - E_0) d_2\Omega' \end{aligned}$$

Se ora integriamo ambo i membri sull'energia, vale a dire:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \Omega \cdot \nabla \Phi(\bar{x}, \Omega) \delta(E - E_0) dE + \int_0^{\infty} \Sigma(E) \Phi(\bar{x}, \Omega) \delta(E - E_0) dE = \\ \int_0^{\infty} S(\bar{x}, \Omega) \delta(E - E_0) dE + \int_0^{\infty} \int_{4\pi} \Sigma_s(E) \Pi(\Omega' \rightarrow \Omega) \Phi(\bar{x}, \Omega') \delta(E - E_0) d_2\Omega' dE \end{aligned}$$

troviamo finalmente l'equazione di nostro interesse:

$$\Omega \cdot \nabla \Phi(\bar{x}, \Omega) + \Sigma(E_0) \Phi(\bar{x}, \Omega) = S(\bar{x}, \Omega) + \int_{4\pi} \Sigma_s(E_0) \Pi(\Omega' \rightarrow \Omega) \Phi(\bar{x}, \Omega') d_2\Omega'$$

dove nel prosieguo ometteremo l'argomento delle sezioni d'urto, dando per sottinteso che si intendono calcolate all'energia E_0 . Infine presumeremo valida la relazione

$$\Pi(\Omega' \rightarrow \Omega) = \Pi(\Omega' \cdot \Omega)$$

che sappiamo essere verificata per lo scattering elastico dei neutroni come lo abbiamo studiato nel cap. 1. Partiremo dunque in definitiva dall'equazione

$$\Omega \cdot \nabla \Phi(\bar{x}, \Omega) + \Sigma \Phi(\bar{x}, \Omega) = S(\bar{x}, \Omega) + \int_{4\pi} \Sigma_s \Pi(\Omega' \cdot \Omega) \Phi(\bar{x}, \Omega') d_2\Omega'$$

I polinomi di Legendre

Notiamo in primo luogo che

$$\mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{\Omega} = \cos \vartheta_0 = \mu_0 = \mu \mu' + \sqrt{1-\mu^2} \sqrt{1-\mu'^2} \cos(\varphi - \varphi')$$

o, che è lo stesso,

$$\Sigma_s(\mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{\Omega}) = \Sigma_s \left[\mu \mu' + \sqrt{1-\mu^2} \sqrt{1-\mu'^2} \cos(\varphi - \varphi') \right]$$

In altre parole, tale funzione dipende dagli angoli di colatitudine prima e dopo l'urto e dal coseno degli angoli di azimuth prima e dopo l'urto.

I polinomi di Legendre sono un insieme COMPLETO di funzioni ortogonali nell'insieme $x \in [-1,1]$. Li indicheremo con $P_\ell(x)$. Essendo un insieme ortogonale completo è facile sviluppare una funzione su $[-1,1]$ in serie di $P_\ell(x)$.

Citiamo due proprietà di $P_\ell(x)$:

- (ortogonalità)
$$\int_{-1}^1 P_\ell(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell,m}$$
- (ricorrenza)
$$(2\ell+1)xP_\ell(x) = (\ell+1)P_{\ell+1}(x) + \ell P_{\ell-1}(x)$$

Facciamo uno sviluppo in serie di $\Sigma_s(\mu_0)$ (possiamo infatti farlo il dominio di Σ_s è proprio $[-1,1]$).

$$\Sigma_s(\mu_0) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{4\pi} \Sigma_{s,\ell} P_\ell(\mu_0)$$

Moltiplicando ambo i membri per $P_m(\mu_0)$ ed integrando otteniamo

$$\int_{-1}^1 \Sigma_s(\mu_0) P_m(\mu_0) d\mu_0 = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{4\pi} \Sigma_{s,\ell} \int_{-1}^1 P_\ell(\mu_0) P_m(\mu_0) d\mu_0 = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{4\pi} \Sigma_{s,\ell} \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell,m} = \frac{1}{2\pi} \Sigma_{s,m}$$

da cui

$$\Sigma_{s,m} = 2\pi \int_{-1}^1 \Sigma_s(\mu_0) P_m(\mu_0) d\mu_0$$

Vediamo che per $m = 0$ (quindi $P_0(x) = 1$) abbiamo

$$\Sigma_{s,0} = 2\pi \int_{-1}^1 \Sigma_s(\mu_0) d\mu_0 = \int_{4\pi} \Sigma_s(\mu_0) d_2\Omega = \Sigma_s$$

per $m = 1$ ($P_1(x) = x$)

$$\Sigma_{s,1} = 2\pi \int_{-1}^1 \mu_0 \Sigma_s(\mu_0) d\mu_0 = \langle \mu_0 \rangle \Sigma_s$$

dove

$$\langle \mu_0 \rangle = \frac{\int_{-1}^1 \mu_0 \Pi(\mu_0) d\mu_0}{\int_{-1}^1 \Pi(\mu_0) d\mu_0}.$$

Limitiamo ancora la trattazione al caso monodimensionale (nel senso che ϕ ed S dipendono solo da una sola coordinata spaziale) e diciamo z la variabile spaziale. Consideriamo che vi sia simmetria azimutale anche per la sorgente. Tutto dipende quindi solo da $\mu = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{k}$ per cui

$$\begin{aligned} S(\mathbf{x}, \mathbf{\Omega}) &\rightarrow S(z, \mu) \\ \phi(\mathbf{x}, \mathbf{\Omega}) &\rightarrow \phi(z, \mu) \\ \mathbf{\Omega} \cdot \nabla &\rightarrow \mu \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

Scriviamo quindi l'equazione 1-D di Boltzmann come

$$\mu \frac{\partial}{\partial z} \phi(z, \mu) + \Sigma \phi(z, \mu) = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \Sigma_s(\mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{\Omega}) \phi(z, \mu') d\mu' d\varphi' + S(z, \mu)$$

Nota che per scattering isotropo nel sistema del laboratorio si otterrebbe:

$$\mu \frac{\partial}{\partial z} \phi(z, \mu) + \Sigma \phi(z, \mu) = \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^1 \phi(z, \mu') d\mu' + S(z, \mu)$$

Torniamo al caso di scattering generico e sviluppiamo Σ_s in serie di μ e μ'

$$\begin{aligned} \Sigma_s(\mu_0) &= \Sigma_s(\mu' \mu + \sqrt{1-\mu^2} \sqrt{1-\mu'^2} \cos(\varphi - \varphi')) = \sum_0^{\infty} \ell \frac{2\ell+1}{4\pi} \Sigma_{s,\ell} P_\ell(\mu_0) = \\ &= \sum_0^{\infty} \ell \frac{2\ell+1}{4\pi} \Sigma_{s,\ell} P_\ell(\mu) P_\ell(\mu') + \sum_0^{\infty} \ell \sum_{-l}^l G_{\ell,m}(\mu, \mu') \cos[m(\varphi - \varphi')] \end{aligned}$$

Ove $G_{l,m}(\mu, \mu')$ è una certa funzione che non esplicheremo. Ci basta sapere che NON dipende da φ e φ' (per ulteriori approfondimenti vedere la legge di addizione dei polinomi di Legendre). Riprendiamo dunque l'integrale a secondo membro dell'equazione di Boltzmann e integriamo rispetto a $d\varphi'$:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 d\mu' \int_0^{2\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{4\pi} \{ \Sigma_{s,\ell} P_{\ell}(\mu) P_{\ell}(\mu') + \sum_{m=-\ell}^{\ell} G_{\ell,m}(\mu, \mu') \cos[m(\varphi - \varphi')] \} \phi(z, \mu') d\varphi' = \\ & \sum_0^{\infty} \frac{2\ell+1}{4\pi} \Sigma_{s,\ell} \int_{-1}^1 \phi(z, \mu') \{ P_{\ell}(\mu) P_{\ell}(\mu') \int_0^{2\pi} d\varphi' + \sum_{m=-\ell}^{\ell} G_{\ell,m}(\mu, \mu') \int_0^{2\pi} \cos[m(\varphi - \varphi')] d\varphi' \} d\mu' = \\ & = \sum_0^{\infty} \frac{2\ell+1}{2} \Sigma_{s,\ell} P_{\ell}(\mu) \int_{-1}^1 P_{\ell}(\mu') \phi(z, \mu') d\mu' \end{aligned}$$

Ora possiamo senz'altro sviluppare in serie di $P_{\ell}(\mu)$ su $\mu \in [-1,1]$ anche $\phi(z, \mu)$ e $S(z, \mu)$

$$\phi(z, \mu) = \sum_0^{\infty} \frac{2\ell+1}{4\pi} \phi_{\ell}(z) P_{\ell}(\mu) -$$

$$S(z, \mu) = \sum_0^{\infty} \frac{2\ell+1}{4\pi} S_{\ell}(z) P_{\ell}(\mu)$$

con:

$$\phi_{\ell}(z) = 2\pi \int_{-1}^1 P_{\ell}(\mu) \phi(z, \mu) d\mu$$

$$S_{\ell}(z) = 2\pi \int_{-1}^1 P_{\ell}(\mu) S(z, \mu) d\mu .$$

Possiamo così scrivere l'equazione monodimensionale di Boltzmann come

$$\begin{aligned} & \sum_0^{\infty} \mu P_{\ell}(\mu) \frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{\partial \phi_{\ell}(z)}{\partial z} + \sum_0^{\infty} \frac{2\ell+1}{4\pi} \Sigma \phi_{\ell}(z) P_{\ell}(\mu) = \\ & = \sum_0^{\infty} \frac{2\ell+1}{4\pi} \Sigma_{s,\ell} P_{\ell}(\mu) 2\pi \int_{-1}^1 P_{\ell}(\mu') \phi(z, \mu') d\mu' + \sum_0^{\infty} \frac{2\ell+1}{4\pi} S_{\ell}(z) P_{\ell}(\mu) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} \ell (2\ell+1) \mu P_{\ell}(\mu) \frac{d\phi_{\ell}}{dz} + \Sigma \sum_0^{\infty} \ell (2\ell+1) P_{\ell}(\mu) \phi_{\ell} &= \\ &= \sum_0^{\infty} \ell (2\ell+1) P_{\ell}(\mu) \Sigma_{s,\ell} \phi_{\ell} + \sum_0^{\infty} \ell (2\ell+1) P_{\ell}(\mu) S_{\ell} \end{aligned}$$

Il termine $\mu P_{\ell}(\mu)$ si può riportare ad un polinomio di Legendre con la formula di ricorrenza:

$$(2\ell+1)\mu P_{\ell}(\mu) = (\ell+1)P_{\ell+1}(\mu) + \ell P_{\ell-1}(\mu)$$

ottenendo

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} \ell [(\ell+1)P_{\ell+1}(\mu) + \ell P_{\ell-1}(\mu)] \frac{d\phi_{\ell}}{dz} + \Sigma \sum_0^{\infty} \ell (2\ell+1) P_{\ell}(\mu) \phi_{\ell} &= \\ &= \sum_0^{\infty} \ell (2\ell+1) P_{\ell}(\mu) \Sigma_{s,\ell} \phi_{\ell} + \sum_0^{\infty} \ell (2\ell+1) P_{\ell}(\mu) S_{\ell} \end{aligned}$$

Come è noto le due serie sono identiche se e solo se sono uguali i termini corrispondenti. Dunque possiamo scrivere in generale

$$\ell P_{\ell}(\mu) \frac{d\phi_{\ell-1}}{dz} + (\ell+1)P_{\ell}(\mu) \frac{d\phi_{\ell+1}}{dz} + \Sigma (2\ell+1)P_{\ell}(\mu)\phi_{\ell} = (2\ell+1)P_{\ell}(\mu)\Sigma_{s,\ell}\phi_{\ell} + (2\ell+1)P_{\ell}(\mu)S_{\ell}$$

ovvero

$$\ell \frac{d}{dz} \phi_{\ell-1}(z) + (\ell+1) \frac{d}{dz} \phi_{\ell+1}(z) + (\Sigma - \Sigma_{s,\ell})(2\ell+1)\phi_{\ell}(z) = S_{\ell}(z)(2\ell+1)$$

Naturalmente, per $\ell=0$ il termine $\phi_{\ell-1} = \phi_{-1}$ non c'è (e comunque sarebbe moltiplicato per zero).

Abbiamo pertanto un sistema infinito:

$$\begin{cases} (\Sigma - \Sigma_{s,0})\phi_0(z) + \frac{d\phi_1}{dz} = S_0(z) \\ \ell \frac{d\phi_{\ell-1}(z)}{dz} + (2\ell+1)[\Sigma - \Sigma_{s,\ell}]\phi_{\ell}(z) + \frac{d\phi_{\ell+1}}{dz} = (2\ell+1)S_{\ell}(z) & \ell = 1, \dots, L-1 \\ L \frac{d\phi_{L-1}}{dz} + (2L+1)[\Sigma - \Sigma_{s,L}]\phi_L(z) = (2L+1)S_L(z) \end{cases}$$

In questo caso ci siamo fermati ad L equazioni, dove L dovrebbe essere infinito per avere una rappresentazione esatta dell'equazione del trasporto. In questo caso, con L finito, si parla di APPROSSIMAZIONE P_L .

Approssimazione P1

Naturalmente, la prima approssimazione che viene da fare è quella per $L=1$. Prima di procedere, analizziamo i primi due termini dello sviluppo in serie di polinomi di Legendre del flusso ϕ :

$$\phi_0(z) = 2\pi \int_{-1}^1 \phi(z, \mu) d\mu = \int_{4\pi} \phi(z, \mu) d_2\Omega = \Phi(z)$$

$$\phi_1(z) = 2\pi \int_{-1}^1 \mu \phi(z, \mu) d\mu = \int_{4\pi} \mu \phi(z, \mu) d_2\Omega = \hat{\mathbf{k}} \cdot \int_{4\pi} \Omega \phi(z, \mu) d_2\Omega = \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{J}(z) = J_z(z)$$

Nel nostro caso, in cui abbiamo considerato un'unica coordinata spaziale, abbiamo $J_z \equiv J$, pertanto abbiamo che $\phi_1(z) = J(z)$.

Troncando lo sviluppo in serie di ϕ al termine $\ell = 1$ si ha

$$\phi(z, \mu) = \sum_0^1 \frac{2\ell+1}{4\pi} \phi_\ell(z) P_\ell(\mu) = \frac{1}{4\pi} \phi_0(z) + \frac{3}{4\pi} \mu \phi_1(z) = \frac{1}{4\pi} \Phi(z) + \frac{3}{4\pi} \mu J(z).$$

Consideriamo ora la sorgente. Nel caso di sorgente isotropa, cui ci limiteremo d'ora in poi, si ha

$$S(z, \mu) = S(z) = S_0(z) \quad S_\ell(z) = 0, \forall \ell \geq 1.$$

Scriviamo quindi il sistema per $L=1$

$$\begin{cases} (\Sigma - \Sigma_{s,0})\phi_0(z) + \frac{d\phi_1(z)}{dz} = S_0(z) \\ \frac{d}{dz}\phi_0(z) + 3[\Sigma - \Sigma_{s,1}]\phi_1(z) = S_1(z) \end{cases},$$

Cioè, per quanto appena visto:

$$\begin{cases} \Sigma_a \Phi(z) + \frac{dJ(z)}{dz} = S(z) \\ \frac{d\Phi(z)}{dz} + 3[\Sigma - \langle \mu_0 \rangle \Sigma_s]J(z) = 0 \end{cases}$$

Risolviamo estraendo $J(z)$ dalla seconda equazione:

$$J(z) = -\frac{1}{3(\Sigma - \langle \mu_0 \rangle \Sigma_s)} \frac{d\Phi(z)}{dz}$$

in cui possiamo riconoscere la nota espressione per il coefficiente di diffusione:

$$D = \frac{1}{3(\Sigma - \langle \mu_0 \rangle \Sigma_s)}$$

e quindi riscriviamo la relazione trovata come

$$J(z) = -D \frac{d\Phi(z)}{dz}$$

vale a dire la legge di Fick. Sostituendo nella prima equazione l'espressione trovata per la corrente otteniamo

$$D \frac{d^2\Phi}{dz^2} - \Sigma_a \Phi(z) + S(z) = 0.$$

vale a dire l'equazione della diffusione per il caso MONODIMENSIONALE.

Da notare che per $\Sigma_a \ll \Sigma_s$ si ha che

$$3[\Sigma - \langle \mu_0 \rangle \Sigma_s] \cong 3\Sigma_s(1 - \langle \mu_0 \rangle) = 3\Sigma_{tr}.$$

V.2 Neutroni polienergetici

Veniamo ora al caso di neutroni polienergetici, sempre mantenendo l'ipotesi di stazionarietà. Riscriviamo l'equazione di Boltzmann per neutroni polienergetici:

$$\mathbf{\Omega} \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}, E, \mathbf{\Omega}) + \Sigma(E)\phi(\mathbf{x}, E, \mathbf{\Omega}) = \int_0^\infty \int_{4\pi} \Sigma_s(E' \rightarrow E, \mathbf{\Omega}' \rightarrow \mathbf{\Omega}) \phi(\mathbf{x}, E', \mathbf{\Omega}') dE' d_2\mathbf{\Omega}' + S(\mathbf{x}, E, \mathbf{\Omega})$$

Vediamo dapprima un caso particolare assumendo le seguenti ipotesi:

- mezzo diffondente omogeneo e isotropo esteso ad \mathfrak{R}^3 , con scattering isotropo nel sistema del laboratorio;
- sorgente omogenea e isotropa di $Q \left[\frac{n}{\text{cm}^3\text{s}} \right]$ con distribuzione energetica $S(E)$, cioè

$$S(\mathbf{x}, E, \mathbf{\Omega}) \rightarrow Q \cdot S(E).$$

Sia inoltre

$$\phi(E) = \lim_{V \rightarrow \mathfrak{R}} \frac{1}{V} \int \int_{4\pi} \phi(\mathbf{x}, E, \mathbf{\Omega}) d_2\mathbf{\Omega} d_3\mathbf{x}$$

Facciamo il bilancio dei neutroni considerando i seguenti termini:

$$\frac{\text{rimozioni}}{\text{cm}^3\text{s}} = \Sigma(E)\phi(E) dE$$

$$\frac{\text{produzioni}}{\text{cm}^3\text{s}} = [QS(E) + \int_0^{\infty} \Sigma_s(E' \rightarrow E)\phi(E')dE']dE$$

Allo stato stazionario le perdite devono uguagliare le produzioni. Pertanto il nostro bilancio di particelle diviene:

$$\Sigma(E)\phi(E) = \int_0^{\infty} \Sigma_s(E' \rightarrow E)\phi(E')dE' + QS(E) \quad (**)$$

Per risolvere questa equazioni occorrono informazioni riguardo alla distribuzione energetica della sorgente e al kernel di scattering.

1. Come sorgente esterna prendiamo una sorgente monocromatica che può essere efficacemente rappresentata con la funzione delta di Dirac:

$$S(E) = \delta(E - E_0)$$

2. Per il kernel di rallentamento possiamo invece scrivere

$$\Sigma_s(E' \rightarrow E) = \begin{cases} \Sigma_s(E') \cdot \frac{1}{E'(1-\alpha)} & \text{per } \alpha E' \leq E \leq E' \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

che si può anche scrivere:

$$\Sigma_s(E' \rightarrow E) = \Sigma_s(E') \frac{1}{E'(1-\alpha)} [U(E'-E) - U(E'-\frac{E}{\alpha})].$$

Ricorriamo ad una teoria classica (Vedi V. Boffi, *Fisica del reattore nucleare, Parte II, La teoria integro-differenziale*): scomponiamo il flusso ϕ in due parti, il flusso ϕ_v degli "incollisi" (detto anche flusso "vergine"), cioè neutroni che dopo l'emissione dalla sorgente non hanno ancora subito collisioni, ed il flusso ψ dei "collisi", ossia neutroni che hanno subito almeno una collisione. Pertanto:

$$\phi(E) = \phi_v(E) + \psi(E).$$

Consideriamo ora il bilancio di neutroni per quanto riguarda il flusso vergine allo stato stazionario, uguagliando, come visto, le produzioni alle perdite:

$$QS(E) = \Sigma(E)\phi_v(E)$$

Infatti:

- i) i neutroni cambiano energia soltanto collidendo; gli incollisi mantengono l'energia con cui sono stati emessi.
- ii) Ogni collisione rimuove il neutrone dal numero degli incollisi, in quanto i neutroni $\Sigma_a(E)\phi_v(E)$ che vengono assorbiti nell'unità di volume e di tempo spariscono dal sistema, mentre quelli che subiscono un'interazione di scattering $\Sigma_s(E)\phi_v(E)$ spariscono dal sottoinsieme degli incollisi per passare tra i collisi ($\Sigma(E) = \Sigma_a(E) + \Sigma_s(E)$).

Quindi troviamo subito

$$\phi_v(E) = \frac{QS(E)}{\Sigma(E)}.$$

Possiamo quindi riscrivere il flusso come

$$\phi(E) = \frac{QS(E)}{\Sigma(E)} + \Psi(E)$$

e introducendolo nella (**):

$$\Sigma(E) \left[\frac{QS(E)}{\Sigma(E)} + \Psi(E) \right] = \int_0^{\infty} \Sigma_s(E' \rightarrow E) \left[\frac{QS(E')}{\Sigma(E')} + \Psi(E') \right] dE' + QS(E)$$

da cui semplificando:

$$\Sigma(E)\Psi(E) = \int_0^{\infty} \Sigma_s(E' \rightarrow E)\Psi(E')dE' + Q \int_0^{\infty} \frac{\Sigma_s(E' \rightarrow E)}{\Sigma(E')} S(E')dE'$$

utilizziamo ora l'informazione $S(E) = \delta(E - E_0)$ e poniamo per comodità:

$$c(E) = \frac{\Sigma_s(E)}{\Sigma(E)}$$

dove $c(E) \leq 1$. L'equazione in discorso diviene dunque:

$$\Sigma(E)\Psi(E) = \int_0^{\infty} \Sigma_s(E')\Pi(E' \rightarrow E)\Psi(E')dE' + Q \int_0^{\infty} \frac{\Sigma_s(E')}{\Sigma(E')} \Pi(E' \rightarrow E)\delta(E' - E_0)dE'$$

ovvero

$$\Sigma(E)\Psi(E) = \int_0^{\infty} \Sigma_s(E')\Pi(E' \rightarrow E)\Psi(E')dE' + Qc(E_0)\Pi(E_0 \rightarrow E)$$

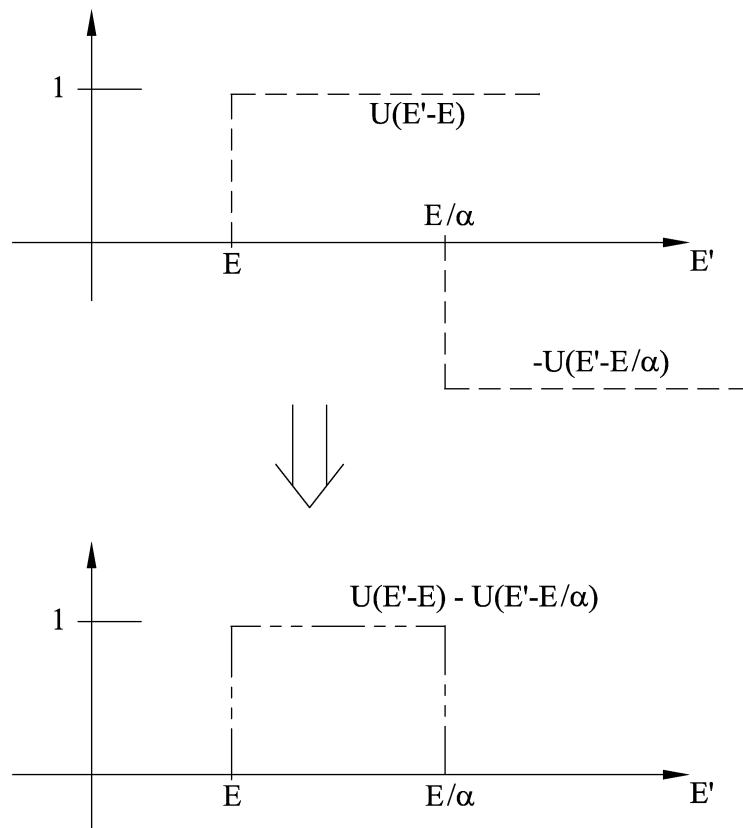
Utilizziamo ora la seconda informazione:

$$\Sigma_s(E' \rightarrow E) = \Sigma_s(E') \frac{1}{E'(1-\alpha)} [U(E'-E) - U(E' - \frac{E}{\alpha})].$$

Esaminiamo questa espressione per il caso $E' = E_0$

$$\Sigma_s(E_0)\Pi(E_0 \rightarrow E) = \Sigma_s(E_0) \frac{1}{E_0(1-\alpha)} [U(E_0 - E) - U(E_0 - \frac{E}{\alpha})].$$

Facciamo uno schizzo delle funzioni U coinvolte:



In particolare quindi per $\Pi(E_0 \rightarrow E)$ vediamo che, come sappiamo,

$$\Sigma_s(E_0 \rightarrow E) = \begin{cases} \frac{\Sigma_s(E_0)}{E_0(1-\alpha)} & E \leq E_0 \leq \frac{E}{\alpha} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Distinguiamo perciò 2 casi:

➤ Se $E \leq E_0 \leq E/\alpha$, ovvero $\alpha E_0 \leq E \leq E_0$ che è lo stesso, allora

$$\Sigma_s(E_0 \rightarrow E) = \frac{\Sigma_s(E_0)}{E_0(1-\alpha)}$$

➤ Se $E_0 > E/\alpha$, ovvero $E < \alpha E_0$ che è lo stesso, allora

$$\Sigma_s(E_0 \rightarrow E) = 0$$

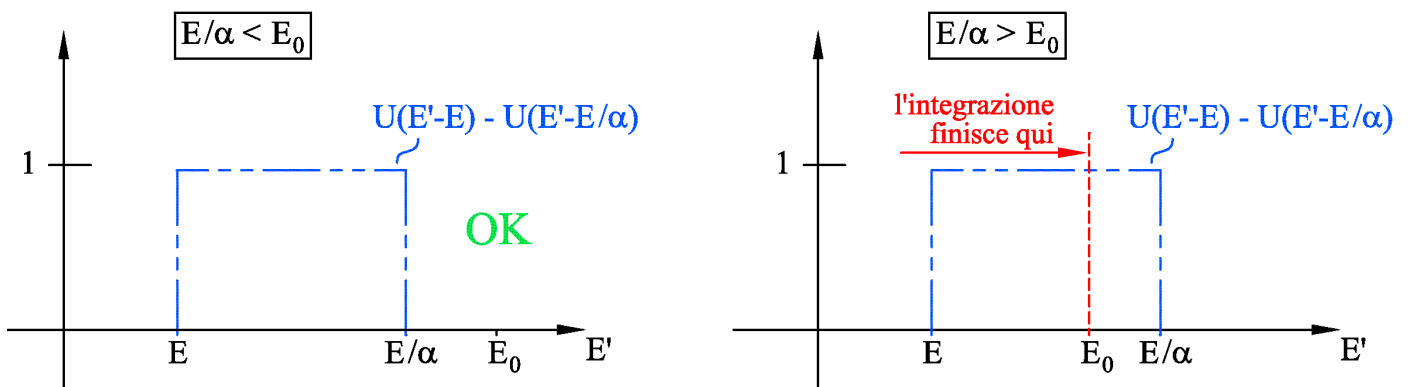
il che è logico, infatti in una collisione il neutrone non può scendere sotto αE_0 , quindi le collisioni ad E_0 non possono dare contributo al di sotto di αE_0 .

Un'altra considerazione: poiché i neutroni nascono con energia E_0 , e gli scattering possono solo degradare l'energia, nel sistema *non vi possono essere neutroni con energia maggiore di E_0* . Pertanto, l'integrale esteso a $[0, \infty)$ in realtà è esteso a $[0, E_0]$, poiché $\Psi(E') \equiv 0$ per $E' > E_0$.

Quindi:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \Sigma_s(E') \Pi(E' \rightarrow E) \Psi(E') dE' &= \frac{1}{1-\alpha} \int_0^{E_0} \Sigma_s(E') \Psi(E') [U(E'-E) - U(E' - \frac{E}{\alpha})] \frac{dE'}{E'} \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \int_E^{\min[E_0, E/\alpha]} \Sigma_s(E') \Psi(E') \frac{dE'}{E'} \end{aligned}$$

Infatti si danno 2 casi:



In definitiva abbiamo due casi:

➤ $\alpha E_0 \leq E \leq E_0$

$$\Sigma(E)\Psi(E) = \frac{Q c(E_0)}{(1-\alpha)E_0} + \frac{1}{1-\alpha} \int_E^{E_0} \Sigma_s(E') \Psi(E') \frac{dE'}{E'}$$

➤ $E < \alpha E_0$

$$\Sigma(E)\Psi(E) = \frac{1}{1-\alpha} \int_E^{E/\alpha} \Sigma_s(E') \Psi(E') \frac{dE'}{E'}$$

od anche, introducendo la densità totale di collisioni dei neutroni non vergini

$$F(E) = \Sigma(E)\Psi(E)$$

$$(*) \quad F(E) = \frac{Q c(E_0)}{(1-\alpha)E_0} + \frac{1}{1-\alpha} \int_E^{E_0} c(E') F(E') \frac{dE'}{E'} \quad \alpha E_0 \leq E \leq E_0$$

$$(**) \quad F(E) = \frac{1}{1-\alpha} \int_E^{E/\alpha} c(E') F(E') \frac{dE'}{E'} \quad E < \alpha E_0$$

V.3 Il rallentamento continuo

Introduciamo la variabile LETARGIA: essa è definita con riferimento ad una energia E_0 , solitamente l'energia di sorgente, o comunque la più elevata presente nel sistema:

$$u = \ln \frac{E_0}{E}$$

ovvero possiamo esprimere l'energia in funzione della letargia come

$$E = E_0 e^{-u}$$

Ricordando il decremento medio logaritmico di energia

$$\xi = \left\langle \ln \frac{E'}{E} \right\rangle$$

vediamo che questo è al tempo stesso l'incremento medio di letargia per ogni urto.

Se un neutrone nato con energia E_0 ha subito N collisioni, la sua letargia sarà divenuta (mediamente)

$$u_N = N \xi \quad \Rightarrow \quad E_N = E_0 e^{-N\xi}$$

facciamo la differenza di energia tra l' N -esimo ed il successivo:

$$\Delta E_{N+1} = E_{N+1} - E_N = E_0 e^{-(N+1)\xi} - E_0 e^{-N\xi} = E_0 e^{-N\xi} (e^{-\xi} - 1)$$

Per $N = 0$ la stessa formula porge:

$$\Delta E_1 = E_1 - E_0 = E_0 e^{-\xi} - E_0 = E_0 (e^{-\xi} - 1)$$

e possiamo quindi riscrivere:

$$\Delta E_{N+1} = E_0 (e^{-\xi} - 1) e^{-N\xi} = \Delta E_1 e^{-N\xi}$$

Vediamo quindi che mentre la variazione di letargia per ogni urto è (in media) costante, nel senso che non dipende dalla letargia posseduta prima dell'urto,

$$u_{\text{dopo}} = u_{\text{prima}} + \xi \quad \forall u_{\text{prima}}$$

la variazione di energia diventa sempre più piccola al diminuire dell'energia di partenza. Come già sapevamo: infatti la perdita massima di energia in un urto è $\Delta E_{\text{max}} = (1 - \alpha)E'$.

Valutiamo ora il tempo tra una collisione e la successiva. Abbiamo già accennato al fatto che $\Sigma_s(E)$ è, con buona approssimazione, all'incirca costante con E . Il libero cammino medio quindi, trascurando l'assorbimento, rimane anch'esso circa costante:

$$\lambda \cong \lambda_s = \frac{1}{\Sigma_s(E)} \approx \text{costante}$$

Il tempo medio tra due collisioni, che possiamo scrivere come

$$t \cong \frac{\lambda_s}{v}$$

diventa sempre più lungo al diminuire della velocità. Pertanto, se

$$t_j \cong \frac{\lambda_s}{v_j}$$

è il tempo che occorre (in media) ad un neutrone uscito dalla collisione j -esima con velocità v_j per subire una successiva collisione, la $(j+1)$ -esima, il tempo complessivo per arrivare alla collisione $(n+1)$ -esima possiamo calcolarlo come

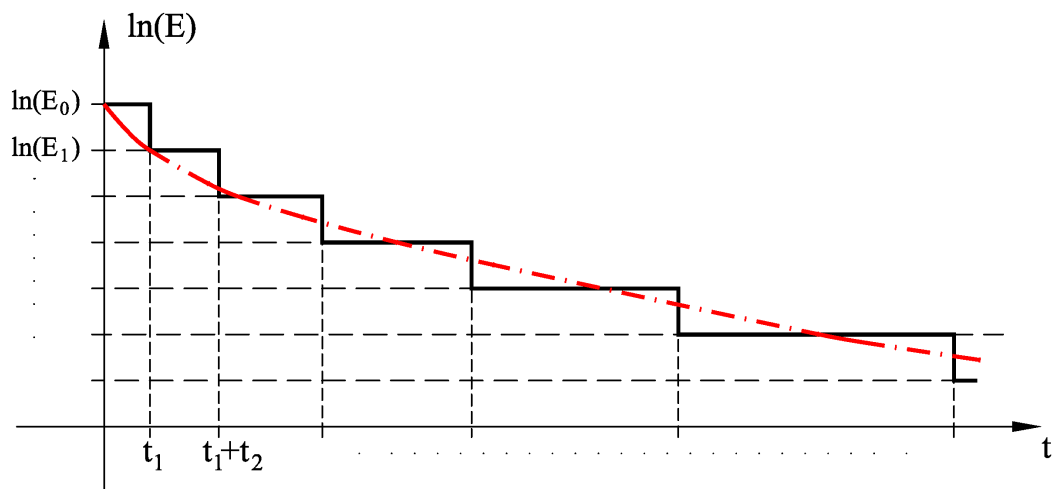
$$t_{\text{rall}} = \sum_{j=0}^{j=n} t_j \cong \lambda_s \sum_{j=0}^{j=n} \frac{1}{v_j}$$

Peraltro, sappiamo che

$$\ln E_{N+1} = \ln E_0 - (n+1)\xi$$

perciò se riportiamo $\ln E$ in funzione del tempo abbiamo una curva a scalini, con gradini di altezza costante ξ e larghezza crescente $\frac{\lambda_s}{v_j}$.

L'approssimazione del rallentamento continuo consiste nel sostituire la curva a gradini con una curva liscia come quella tratteggiata in rosso.



Se un neutrone al tempo t ha velocità $v(t) = \sqrt{2E(t)/m}$, nel tempo dt successivo a percorrere una distanza $v(t)dt$. Se λ_s è il libero cammino medio di scattering, nel tempo dt il neutrone subisce un “numero di urti” dn dato da

$$dn = \frac{v(t)dt}{\lambda_s}$$

e poiché in ogni urto acquista una letargia (ovvero perde logicamente un'energia) ξ , possiamo scrivere:

$$d \ln E = \frac{dE}{E} = -\xi dn = -\xi \frac{v(t)dt}{\lambda_s} = -\frac{\xi}{\lambda_s} \sqrt{\frac{2E(t)}{m}} dt$$

ovvero

$$\frac{dE}{E^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\xi}{\lambda_s} \sqrt{\frac{2}{m}} dt \quad \Rightarrow \quad dt = -\frac{\lambda_s}{\xi} \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dE}{E^{\frac{3}{2}}}$$

da cui integrando tra E_1 ed E_2 otteniamo il tempo necessario al neutrone per rallentare in modo “continuo” dall'energia E_1 all'energia E_2 , tempo che chiameremo t_{rall}

$$\int_0^{t_{\text{rall}}} dt = -\frac{\lambda_s}{\xi} \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{E_1}^{E_2} \frac{dE}{E^{\frac{3}{2}}}$$

Pertanto otteniamo

$$t_{\text{rall}} = \frac{2\lambda_s}{\xi} \sqrt{\frac{m}{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{E_2}} - \frac{1}{\sqrt{E_1}} \right] = \frac{2\lambda_s}{\xi} \left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} \right)$$

In particolare, se $v_1 \gg v_2$ possiamo dire semplicemente

$$t_{\text{rall}} \cong \frac{2\lambda_s}{\xi} \frac{1}{v_2}$$

Ad esempio, siano $E_1 = 2 \text{ MeV}$ e $E_2 = 0.025 \text{ eV}$: è chiaro che $v_1 \gg v_2$ e quindi

$$t_{\text{rall}} \cong \frac{2}{\xi} \frac{\lambda_s}{2.2 \times 10^5 \text{ cm/s}}$$

Ricordiamo che il tempo di diffusione, t_{diff} è dato da

$$t_{\text{diff}} \cong \frac{1}{\Sigma_a v_{\text{th}}} = \frac{\lambda_a}{2.2 \times 10^5 \text{ cm/s}}$$

e il rapporto tra i due tempi si calcola immediatamente come

$$\frac{t_{\text{diff}}}{t_{\text{rall}}} \cong \frac{\xi \lambda_a}{2 \lambda_s}$$

Poiché in zona termica $\lambda_a / \lambda_s \gg 1$, seppure $\xi/2 < 1$ abbiamo che tale rapporto, per i moderatori usuali, è dell'ordine di 100: la vita del neutrone è spesa quasi tutta nella diffusione.

<i>Valori del tempo di rallentamento e del tempo di diffusione in un mezzo infinito</i>					
<i>Moderatore</i>	$2/\xi$	λ_s [cm]	t_{rall} [s]	λ_a [cm]	ℓ_0 [s]
Acqua	2	1.1	10^{-5}	59	2.7×10^{-4}
Acqua pesante	2.76	2.6	3.2×10^{-5}	12500	6×10^{-2}
Berillio	9.6	1.6	7×10^{-5}	770	3.5×10^{-3}
Grafite	12.5	2.6	15×10^{-5}	3330	1.5×10^{-2}

Tratto da V. Boffi, Fisica del reattore nucleare, Vol.2, tabella 11

pagina intenzionalmente vuota

VI. LA TEORIA DELL'ETÀ DI FERMI

VI.1 Il caso senza assorbimento

Riscriviamo l'equazione del rallentamento per $E < \alpha E_0$ e per il caso $c(E) = 1$

$$F(E) = \frac{1}{1-\alpha} \int_E^{E/\alpha} F(E') \frac{dE'}{E'}$$

La soluzione, come è facile verificare, è del tipo

$$F(E) = \frac{C}{E}$$

dobbiamo quindi determinare la costante C . Ricordiamo che $F(E')dE'$ rappresenta il numero di neutroni che, possedendo energia compresa nell'intervallo $[E', E'+dE']$, subiscono interazione, quindi nel presente caso di $c(E) = 1$, subiscono collisione elastica.

Ricordiamo che, in accordo col modello di scattering elastico visto in precedenza, la **densità di probabilità** per l'energia dopo l'urto è

$$\Pi(E' \rightarrow E) = \begin{cases} \frac{1}{E'(1-\alpha)} & E \in [\alpha E', E'] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Facendo riferimento al caso $E' < E_0$, possiamo dire che la probabilità che dopo l'urto un neutrone si venga a trovare ad una qualunque energia compresa nell'intervallo $[\alpha E', E_1]$, con $E_1 \in [\alpha E', E']$, è data da

$$P(E \in [\alpha E', E_1]) = \frac{E_1 - \alpha E'}{E'(1-\alpha)}$$

(attenzione: è una PROBABILITÀ, non una **densità di probabilità**).

A partire da questo, vogliamo calcolare la cosiddetta DENSITÀ DI RALLENTAMENTO $q(E_b)$, cioè il numero totale di neutroni che nell'unità di volume e di tempo scende sotto l'energia E_b . Vale a dire che invertiamo il problema: se richiedo che il neutrone dopo lo scattering abbia energia uguale o inferiore ad E_b , da quali energie posso partire? Come sappiamo, da qualunque energia compresa tra E_b ed $\frac{1}{\alpha} E_b$.

Per ogni energia di partenza $E' \in [E_b, \frac{1}{\alpha} E_b]$ avremo una probabilità di scendere sotto l'energia E_b data da

$$P(E' \rightarrow E < E_b) = \frac{E_b - \alpha E'}{E'(1 - \alpha)}$$

Calcoliamo il numero di neutroni che nell'unità di volume e di tempo scende sotto l'energia E_b , che chiameremo DENSITÀ DI RALLENTAMENTO $q^*(E_b)$, dove abbiamo aggiunto un asterisco per ricordarci che stiamo considerando il caso senza assorbimento. Procediamo così: per ogni intervallo infinitesimo di partenza $[E', E'+dE']$ avremo un contributo $dq(E_b)$ dato dal prodotto tra il numero di collisioni per unità di tempo e di volume e la probabilità che in seguito a tali collisioni i neutroni scendano sotto la soglia E_b :

$$dq(E_b) = F(E') dE' \times \frac{E_b - \alpha E'}{E'(1 - \alpha)}$$

Integrando ora su tutte le energie possibili, vale a dire $E' \in [E_b, \frac{1}{\alpha} E_b]$, otteniamo

$$q^*(E_b) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{E_b}^{E_b/\alpha} F(E') \frac{E_b - \alpha E'}{E'} dE'$$

Se inseriamo in questo integrale l'espressione $F(E) = \frac{C}{E}$ trovata poc'anzi, e ricordando

l'espressione per il decremento medio logaritmico $\xi = 1 - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \ln \frac{1}{\alpha}$,

$$q^*(E_b) = C \cdot \xi$$

(calcolatelo come esercizio); pertanto (nel caso considerato $c(E) = 1$, cioè assenza di assorbimento) $q^*(E)$ è costante a tutte le energie.

Ora, osserviamo che in assenza di assorbimento tale numero, costante ad ogni energia, deve uguagliare il numero di neutroni da sorgente:

$$q^*(E) \frac{\text{neutroni}}{\text{cm}^3 - \text{s}} = Q \frac{\text{neutroni}}{\text{cm}^3 - \text{s}}$$

da cui si trae immediatamente il valore della costante C:

$$C = \frac{Q}{\xi}$$

In definitiva possiamo dunque scrivere

$$F(E) = \frac{Q}{\xi E}$$

od anche, riferendoci al flusso colliso,

$$\Psi(E) = \frac{Q}{\xi E \Sigma(E)}$$

Diciamo anche, senza ricavarlo, che in termini di letargia possiamo scrivere

$$q^*(u) = \xi F(u) = \xi \Sigma(u) \Psi(u)$$

Continuando a considerare il caso senza assorbimento, osserviamo un intervallo generico $[u_1, u_2]$: in assenza di un contributo diretto dovuto a una sorgente esterna, l'unico termine di sorgente presente in questo intervallo sarà quello dovuto al rallentamento. Avremo come al solito un contributo positivo (i neutroni che rallentando "entrano" nell'intervallo cioè superano la letargia u_1) ed uno negativo (quelli che ne "escono", cioè superano la letargia u_2). Per meglio spiegarci, consideriamo i neutroni che superano, a seguito di una collisione, la letargia u_1 : tra questi ve ne saranno alcuni che la supereranno di poco, altri che la supereranno di molto, superando così anche la letargia u_2 , *quindi senza fermarsi nell'intervallo* che stiamo esaminando. Pertanto il numero di neutroni che nell'unità di tempo e di volume appariranno entro l'intervallo sarà dato da quelli che superano la letargia u_1 depurati di quelli che superano anche la letargia u_2 : questi ultimi infatti sono compresi nel valore $q^*(u_1)$ oltre che in $q^*(u_2)$ e quindi la sorgente netta sarà data da $q^*(u_1) - q^*(u_2)$. Veniamo ora ad un intervallo generico ma infinitesimo $[u, u + du]$, la sorgente sarà dunque data da $q^*(u) - q^*(u + du)$. Sviluppiamo tale espressione:

$$Q(u)du = q^*(u) - q^*(u + du) = q^*(u) - \left(q^*(u) + \frac{\partial q^*(u)}{\partial u} du \right) = - \frac{\partial q^*(u)}{\partial u} du$$

Vediamo l'equazione di diffusione per il caso presente, cioè senza assorbimento;

$$D \nabla^2 \Psi(\bar{x}, u) + Q(\bar{x}, u) = 0$$

Considerando la sorgente di rallentamento appena vista possiamo dunque scrivere

$$D(u) \nabla^2 \Psi(\bar{x}, u) = \frac{\partial q^*(\bar{x}, u)}{\partial u}$$

Ma ricordando l'espressione di $q^*(\bar{x}, u)$

$$q^*(\bar{x}, u) = \xi \Sigma(u) \Psi(\bar{x}, u)$$

Possiamo estrarre il flusso:

$$\Psi(\bar{x}, u) = \frac{q^*(\bar{x}, u)}{\xi \Sigma(u)}$$

possiamo comporre quest'ultima con l'equazione di diffusione ottenendo:

$$\frac{\partial q^*(\bar{x}, u)}{\partial u} = D(u) \nabla^2 \frac{q^*(\bar{x}, u)}{\xi \Sigma(u)} = \frac{D(u)}{\xi \Sigma(u)} \nabla^2 q^*(\bar{x}, u)$$

Definiamo ora la nuova quantità seguente, detta ETÀ DI FERMI:

$$d\tau = \frac{D(u)}{\xi \Sigma(u)} du$$

introducendola nell'espressione precedente, con semplici passaggi si ottiene l'EQUAZIONE DELL'ETÀ di Fermi in forma ristretta (cioè per mezzi non assorbenti):

$$\frac{\partial q^*(\bar{x}, \tau)}{\partial \tau} = \nabla^2 q^*(\bar{x}, \tau)$$

VI.2 Il caso con assorbimento

Se è presente l'assorbimento l'equazione di diffusione diviene:

$$D \nabla^2 \Psi(\bar{x}, u) - \Sigma_a(u) \Psi(\bar{x}, u) + Q(\bar{x}, u) = 0$$

e occorre considerare la densità di rallentamento in presenza di assorbimento (quindi la scriveremo senza asterisco):

$$Q(\bar{x}, u) = -\frac{\partial q(\bar{x}, u)}{\partial u}$$

da cui

$$D \nabla^2 \Psi(\bar{x}, u) - \Sigma_a(u) \Psi(\bar{x}, u) = \frac{\partial q(\bar{x}, u)}{\partial u}$$

Si tratta ora di definire $q(\bar{x}, u)$ in questo diverso caso. Supponiamo di poter estendere la definizione data in precedenza, e continuare a scrivere

$$q(\bar{x}, u) = \xi \Sigma(u) \Psi(\bar{x}, u)$$

È chiaro quanto diremo sarà vero solo nella misura in cui è valida questa relazione tra flusso e densità di rallentamento. Per il momento la accettiamo, vedremo presto una derivazione più stringente dell'equazione dell'età in forma completa. Possiamo comunque darne un'argomentazione fisica, seppur molto qualitativa, che la rende plausibile. Riscriviamola in termini di energia:

$$q(\bar{x}, E) = \xi E \Sigma(E) \Psi(\bar{x}, E)$$

ora riordiniamola e moltiplichiamola per dE :

$$\Sigma(E) \Psi(\bar{x}, E) dE = \frac{q(\bar{x}, E)}{\xi} \frac{dE}{E} = q(\bar{x}, E) \frac{d \ln E}{\xi}$$

La quantità $\frac{d \ln E}{\xi}$ è il rapporto tra il decremento logaritmico nell'intervallo e il decremento medio per collisione, possiamo quindi vederlo come la frazione di quei neutroni che scendono sotto E che rimane entro dE . Il secondo membro dell'equazione rappresenta quindi il rateo a cui i neutroni vengono resi disponibili in dE . D'altra parte, il primo membro rappresenta i neutroni che vengono "consumati" nell'intervallo dE , l'equazione propone dunque un bilancio che deve essere approssimativamente valido (l'approssimazione non è nel bilancio, chiaramente: quest'ultimo deve sempre essere verificato allo stato stazionario; l'approssimazione è nel calcolo del termine di "produzione").

Con il procedimento già visto otteniamo

$$\frac{\partial q(\bar{x}, \tau)}{\partial \tau} = \nabla^2 q(\bar{x}, \tau) - \frac{\Sigma_a(\tau)}{D(\tau)} q(\bar{x}, \tau)$$

Siamo ulteriormente rassicurati, almeno in parte, dal fatto che l'equazione completa così scritta si riduce a quella trovata prima quando si fa tendere a zero l'assorbimento.

Possiamo pensare di cercare una relazione tra $q(\bar{x}, \tau)$ e $q^*(\bar{x}, \tau)$. Forse è possibile scrivere

$$q(\bar{x}, \tau) = p(\tau) \cdot q^*(\bar{x}, \tau)$$

con un'opportuna scelta di $p(\tau)$. Possiamo cioè tentare di scegliere la funzione $p(\tau)$ in modo tale che nell'equazione dell'età il termine $\frac{\Sigma_a(\tau)}{D(\tau)} q(\bar{x}, \tau)$ sparisca (o meglio: in modo tale il suo effetto venga incorporato nella funzione $p(\tau)$). Inseriamo quindi la posizione sopradetta nell'equazione dell'età:

$$q^*(\bar{x}, \tau) \frac{dp(\tau)}{d\tau} + p(\tau) \frac{\partial q^*(\bar{x}, \tau)}{\partial \tau} = p(\tau) \nabla^2 q^*(\bar{x}, \tau) - \frac{\Sigma_a(\tau)}{D(\tau)} p(\tau) q^*(\bar{x}, \tau)$$

Poiché $q^*(\bar{x}, \tau)$ verifica l'equazione dell'età in forma ridotta, abbiamo che nell'equazione qui sopra possiamo semplificare i termini identici:

$$p(\tau) \frac{\partial q^*(\bar{x}, \tau)}{\partial \tau} = p(\tau) \nabla^2 q^*(\bar{x}, \tau)$$

rimanendo con

$$q^*(\bar{x}, \tau) \frac{dp(\tau)}{d\tau} = -\frac{\Sigma_a(\tau)}{D(\tau)} p(\tau) q^*(\bar{x}, \tau)$$

e in questa possiamo ancora semplificare il fattore $q^*(\bar{x}, \tau)$ (che è diverso da zero) ottenendo infine

$$\frac{dp(\tau)}{d\tau} = -\frac{\Sigma_a(\tau)}{D(\tau)} p(\tau)$$

L'equazione per $p(\tau)$ con la condizione $p(0)=1$ porge:

$$p(\tau) = \exp \left\{ -\int_0^\tau \frac{\Sigma_a(t)}{D(t)} dt \right\}$$

Pertanto possiamo costruire la soluzione come prodotto, cioè:

- risolviamo l'equazione in forma ridotta trovando $q^*(\bar{x}, \tau)$
- calcoliamo $p(\tau) = \exp \left\{ -\int_0^\tau \frac{\Sigma_a(t)}{D(t)} dt \right\}$
- infine scriviamo $q(\bar{x}, \tau)$ come prodotto: $q(\bar{x}, \tau) = q^*(\bar{x}, \tau) \times \exp \left\{ -\int_0^\tau \frac{\Sigma_a(t)}{D(t)} dt \right\}$

È chiaro che si avrà sempre $q(\bar{x}, \tau) \leq q^*(\bar{x}, \tau)$

Possiamo ancora ricalcolare $p(\tau)$ come funzione della letargia:

$$p(u) = \exp \left\{ -\int_0^\tau \frac{\Sigma_a(t)}{D(t)} dt \right\} = \exp \left\{ -\frac{1}{\xi} \int_0^u \frac{\Sigma_a(u')}{\Sigma(u')} du' \right\}$$

che forse ricorderete essere la formula di Wigner per il fattore di trasparenza.

VI.3 Presenza della sorgente

Premettiamo che la densità di rallentamento esiste indipendentemente dalla sua relazione con il flusso: è vero che è stata inizialmente derivata nelle ipotesi di assenza di assorbimento e di distanza dell'energia presa in considerazione dall'energia iniziale di sorgente: tuttavia quello che dipende da queste ipotesi è la forma di $q(\bar{x}, E)$ - ovvero $q(\bar{x}, u)$ - e come questa sia legata al flusso. Se queste ipotesi non sono verificate la relazione trovata cessa di essere vera (o comunque va ricavata *ex novo*), ma la quantità "densità di rallentamento $q(\bar{x}, u)$ " continua ad esistere, e la sorgente locale dovuta al rallentamento continua ad essere data dalla derivata di tale quantità:

$$Q_{\text{rall}}(\bar{x}, u) = - \frac{\partial q(\bar{x}, u)}{\partial u}$$

Ciò premesso consideriamo il caso in cui una sorgente esterna (cioè: non di rallentamento) sia presente, diciamola $S(\bar{x}, u)$. Inseriamo questa nell'equazione di diffusione:

$$D \nabla^2 \Psi(\bar{x}, u) - \Sigma_a(u) \Psi(\bar{x}, u) + S(\bar{x}, u) = \frac{\partial q(\bar{x}, u)}{\partial u}$$

Se a questo punto accettiamo ancora una volta la solita relazione densità di rallentamento – flusso, vale a dire:

$$\Psi(\bar{x}, u) = \frac{q(\bar{x}, u)}{\xi \Sigma(u)}$$

possiamo scrivere con procedimento analogo al precedente, che ridettagliamo qui:

$$D(u) \nabla^2 \frac{q(\bar{x}, u)}{\xi \Sigma(u)} - \Sigma_a(u) \frac{q(\bar{x}, u)}{\xi \Sigma(u)} + S(\bar{x}, u) = \frac{\partial q(\bar{x}, u)}{\partial u}$$

da cui

$$\nabla^2 q(\bar{x}, u) - \frac{\Sigma_a(u)}{D(u)} q(\bar{x}, u) + \frac{\xi \Sigma(u)}{D(u)} S(\bar{x}, u) = \frac{\xi \Sigma(u)}{D(u)} \frac{\partial q(\bar{x}, u)}{\partial u}$$

Quindi, ricordando che $q(\bar{x}, u)$ NON è una densità in letargia (cioè, non è per unità di letargia ma solo per unità di volume e tempo) e pertanto $q(\bar{x}, \tau) = q(\bar{x}, u[\tau])$, mentre la sorgente È per unità di letargia (oltreché per unità di volume e tempo) e quindi $S(\bar{x}, \tau) d\tau = S(\bar{x}, u) du$ da cui (v. cap. VII)

$$S(\bar{x}, \tau) = S(\bar{x}, u) \left[\frac{d\tau}{du} \right]^{-1} = \frac{\xi \Sigma(u)}{D(u)} S(\bar{x}, u)$$

e quindi

$$\nabla^2 q(\bar{x}, \tau) - \frac{\Sigma_a(u)}{D} q(\bar{x}, \tau) + S(\bar{x}, \tau) = \frac{\partial q(\bar{x}, \tau)}{\partial \tau}$$

Ancora una volta possiamo dividere il problema in un calcolo di $q^*(\bar{x}, \tau)$ e del fattore $p(\tau)$:

$$\begin{cases} \nabla^2 q^*(\bar{x}, \tau) + S(\bar{x}, \tau) = \frac{\partial q^*(\bar{x}, \tau)}{\partial \tau} \\ p(\tau) = \exp \left\{ - \int_0^\tau \frac{\Sigma_a(t)}{D(t)} dt \right\} \end{cases}$$

Dopodiché la soluzione si otterrà anche in questo caso come prodotto.

VI.4 Applicazioni dell'equazione dell'età

Come discusso sopra, l'obiettivo è risolvere l'equazione nella sua forma ristretta, cioè senza assorbimento; trovata la densità di rallentamento in assenza di assorbimento $q^*(\bar{x}, \tau)$ si risale poi alla soluzione completa moltiplicando per il fattore $p(\tau)$. Occorre però specificare le condizioni al contorno (riguardanti la variabile spaziale) ed "iniziali" (riguardanti l'età). Per quanto riguarda le condizioni al contorno basta considerare da dove siamo partiti – l'equazione di diffusione: è implicito quindi assumere le medesime condizioni di questa

$$\begin{cases} \text{mezzo } \mathbf{infinito} : & \lim_{\bar{x} \rightarrow \infty} q^*(\bar{x}, \tau) = \lim_{\bar{x} \rightarrow \infty} \nabla q^*(\bar{x}, \tau) = 0 \\ \text{mezzo } \mathbf{finito} : & q^*(\bar{x}_s + \hat{n} \cdot d, \tau) = 0 \end{cases}$$

avendo indicato con $\bar{x}_s + \hat{n} \cdot d$ il contorno estrapolato (\bar{x}_s contorno fisico, \hat{n} normale locale al contorno fisico, d distanza estrapolata); per la variabile età avremo invece le condizioni "iniziali" (non è un tempo, come sappiamo, ma la struttura matematica dell'equazione ci spinge a chiamarle lo stesso "iniziali"), considerando come fatto fin qui una sorgente monocromatica all'energia di riferimento $\delta(E - E_0)$, quindi a letargia zero $\delta(u)$, quindi a età zero, $\delta(\tau)$

$$\begin{cases} \lim_{\tau \rightarrow 0^+} q^*(\bar{x}, \tau) = Q(\bar{x}) \\ \lim_{\tau \rightarrow 0^-} q^*(\bar{x}, \tau) = 0 \end{cases}$$

Affrontiamo ora alcuni problemi, cominciando dal caso di mezzo INFINITAMENTE ESTESO.

Sorgente puntiforme monocromatica in un mezzo infinito

La sorgente, pensata anche come origine delle coordinate, avrà la forma $Q_0\delta(\bar{x})\delta(\tau)$, scriviamo dunque l'equazione dell'età;

$$\nabla^2 q^*(\bar{x}, \tau) + Q_0\delta(\bar{x})\delta(\tau) = \frac{\partial q^*(\bar{x}, \tau)}{\partial \tau}$$

facciamo subito la trasformata di Laplace dell'equazione e delle condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \nabla^2 \tilde{q}(\bar{x}, s) + Q_0\delta(\bar{x}) = s\tilde{q}(\bar{x}, s) \\ \lim_{\bar{x} \rightarrow \infty} \tilde{q}(\bar{x}, s) = \lim_{\bar{x} \rightarrow \infty} \nabla \tilde{q}(\bar{x}, s) = 0 \end{cases}$$

Facciamo poi la trasformata tridimensionale di Fourier (nei fatti, si tratta di 3 trasformate: su x, su y e su z)

$$-\omega^2 \tilde{q}(\bar{\omega}, s) + Q_0 = s\tilde{q}(\bar{\omega}, s)$$

troviamo successivamente:

$$\tilde{q}(\bar{\omega}, s) = \frac{Q_0}{s + \omega^2} \Rightarrow \tilde{q}(\bar{\omega}, \tau) = Q_0 e^{-\omega^2 \tau} \Rightarrow q^*(\bar{x}, \tau) = \frac{Q_0}{(4\pi\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{r^2}{4\tau}}$$

dove si è indicato con r il modulo del vettore posizione \bar{x} . Pertanto, la soluzione è una gaussiana tridimensionale, a simmetria sferica come è logico, che si allarga (e si schiaccia) all'aumentare dell'età. Ad età 0 (cioè all'energia di sorgente) la gaussiana ha larghezza nulla e altezza infinita (cioè, è una delta), al crescere dell'età tende ad avere larghezza infinita ed altezza zero.

Vogliamo ora calcolare il valor medio della generica potenza ennesima della distanza percorsa da un neutrone prima di raggiungere un'età predeterminata, chiamiamola τ_0 . La probabilità che il neutrone attraversi l'età τ_0 a una distanza compresa in $(r, r + dr)$ è data da

$$P[\tau_0 \text{ in } (r, r + dr)] = \frac{\int_0^\infty q(r, \tau_0) 4\pi r^2 dr}{\int_0^\infty q(r, \tau_0) 4\pi r^2 dr} = \frac{p(\tau_0) q^*(r, \tau_0) 4\pi r^2 dr}{\int_0^\infty p(\tau_0) q^*(r, \tau_0) 4\pi r^2 dr} = \frac{q^*(r, \tau_0) r^2 dr}{\int_0^\infty q^*(r, \tau_0) r^2 dr} = \frac{e^{-\frac{r^2}{4\tau_0}} r^2 dr}{2\sqrt{\pi} (\tau_0)^{\frac{3}{2}}}$$

e dunque

$$\langle r^n \rangle_{\tau_0} = \frac{\int_0^\infty r^n e^{-\frac{r^2}{4\tau_0}} r^2 dr}{2\sqrt{\pi} (\tau_0)^{\frac{3}{2}}}$$

In particolare troviamo la distanza media e la distanza quadratica media per raggiungere l'età τ :

$$\langle r \rangle = \frac{\int_0^{\infty} r e^{-\frac{r^2}{4\tau}} r^2 dr}{2\sqrt{\pi} \tau^{\frac{3}{2}}} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\tau}$$

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\int_0^{\infty} r^2 e^{-\frac{r^2}{4\tau}} r^2 dr}{2\sqrt{\pi} \tau^{\frac{3}{2}}} = 6\tau$$

Considerando in particolare l'età termica τ_{th} , la quantità $\sqrt{\tau_{th}}$ viene detta lunghezza di rallentamento. Essa è il contraltare relativo al rallentamento di quello che la lunghezza di diffusione L è appunto per la diffusione. Vediamo una tabella con le età termiche e le relative lunghezze di rallentamento per alcuni moderatori, calcolate per la consueta energia di sorgente pari a 2 MeV e l'energia termica pari a 0.025 eV (cf. Boffi, pg. 658).

<i>Età termica e lunghezza di rallentamento</i>		
<i>Moderatore</i>	τ_{th} [cm ²]	$\sqrt{\tau_{th}}$ [cm]
Acqua leggera	33	5.7
Acqua pesante	120	11
Grafite	350	18.7
Berillio	98	10

Sorgente piana infinita sul piano x-y, mezzo infinito

La sorgente avrà la forma $Q_s \delta(z) \delta(\tau)$, dove Q_s ha le dimensioni di una sorgente superficiale $\text{cm}^{-2} - \text{s}^{-1}$, scriviamo dunque l'equazione dell'età;

$$\nabla^2 q^*(z, \tau) + Q_s \delta(z) \delta(\tau) = \frac{\partial q^*(z, \tau)}{\partial \tau}$$

anche qui, facciamo subito la trasformata di Laplace dell'equazione e delle condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \nabla^2 \tilde{q}(z, s) + Q_s \delta(z) = s \tilde{q}(z, s) \\ \lim_{\bar{x} \rightarrow \infty} \tilde{q}(z, s) = \lim_{\bar{x} \rightarrow \infty} \nabla \tilde{q}(z, s) = 0 \end{cases}$$

Facciamo poi la trasformata di Fourier sulla variabile z :

$$-\omega^2 \tilde{q}(\omega, s) + Q_s = s \tilde{q}(\omega, s)$$

e al solito troviamo successivamente:

$$\tilde{q}(\omega, s) = \frac{Q_s}{s + \omega^2} \Rightarrow \tilde{q}(\omega, \tau) = Q_s e^{-\omega^2 \tau} \Rightarrow q^*(\bar{x}, \tau) = \frac{Q_s}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{r^2}{4\tau}}$$

Equazione omogenea in mezzo finito

Partiamo come al solito dall'equazione in forma ridotta, ma senza sorgente:

$$\begin{cases} \nabla^2 q^*(\bar{x}, \tau) = \frac{\partial q^*(\bar{x}, \tau)}{\partial \tau} \\ q^*(\bar{x}_s + \hat{n} \cdot \mathbf{d}, \tau) = 0 \end{cases}$$

tentiamo una soluzione per separazione delle variabili: poniamo $q^*(\bar{x}, \tau) = R(\bar{x})T(\tau)$

$$\begin{cases} T(\tau) \nabla^2 R(\bar{x}) = R(\bar{x}) \frac{dT(\tau)}{d\tau} \\ R(\bar{x}_s + \hat{n} \cdot \mathbf{d}) = 0 \end{cases}$$

Da cui separando le variabili:

$$\begin{cases} \frac{1}{R(\bar{x})} \nabla^2 R(\bar{x}) = \frac{1}{T(\tau)} \frac{dT(\tau)}{d\tau} = -B^2 \\ R(\bar{x}_s + \hat{n} \cdot \mathbf{d}) = 0 \end{cases}$$

dove B^2 è la costante di separazione. Troviamo dunque per la parte spaziale

$$\begin{cases} \nabla^2 R(\bar{x}) = -B^2 R(\bar{x}) \\ R(\bar{x}_s + \hat{n} \cdot \mathbf{d}) = 0 \end{cases}$$

un'equazione agli autovalori, con autovalori B_n^2 e corrispondenti autofunzioni $R_n(\bar{x})$, mentre per la parte relativa all'età scriviamo immediatamente (a meno di una costante che riassorbiremo nelle autofunzioni spaziali)

$$T_n(\tau) = e^{-B_n^2 \tau}$$

In definitiva la soluzione più generale sarà data come combinazione lineare:

$$q^*(\bar{x}, \tau) = \sum_n C_n R_n(\bar{x}) e^{-B_n^2 \tau}$$

Vediamo subito un esempio:

Sorgente piana infinita sul piano x-y, entro una lastra estesa in $(-a, a)$ (inclusa la distanza di estrapolazione):

In questo caso la sorgente è la medesima del caso infinito, e pertanto l'equazione dell'età rimane quella vista:

$$\frac{d^2}{dz^2} q^*(z, \tau) + Q_s \delta(z) \delta(\tau) = \frac{\partial q^*(z, \tau)}{\partial \tau}$$

inoltre trasformando secondo Laplace nella variabile età ritroviamo l'equazione trasformata del caso precedente. Tuttavia sono cambiate le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dz^2} \tilde{q}(z, s) + Q_s \delta(z) = s \tilde{q}(z, s) \\ \tilde{q}(\pm a, s) = 0 \end{cases}$$

In geometria finita non possiamo evidentemente ricorrere alle trasformate di Fourier, conviene invece utilizzare le autofunzioni spaziali dell'equazione omogenea sviluppando in serie di queste ultime:

$$\begin{cases} \tilde{q}(z, s) = \sum_n A_n(s) R_n(z) \\ Q_s \delta(z) = \sum_n Q_n R_n(z) \end{cases}$$

e inserire tali sviluppi nell'equazione dell'età (trasformata)

$$\frac{d^2}{dz^2} \sum_n A_n(s) R_n(z) + \sum_n Q_n R_n(z) = s \sum_n A_n(s) R_n(z)$$

trovando successivamente:

$$\begin{aligned}
 & -\sum_n B_n^2 A_n(s) R_n(z) + \sum_n Q_n R_n(z) = s \sum_n A_n(s) R_n(z) \\
 \Rightarrow & \sum_n (B_n^2 + s) A_n(s) R_n(z) = \sum_n Q_n R_n(z) \\
 \Rightarrow & \sum_n [(B_n^2 + s) A_n(s) - Q_n] R_n(z) = 0 \\
 \Rightarrow & (B_n^2 + s) A_n(s) - Q_n \Rightarrow A_n(s) = \frac{Q_n}{B_n^2 + s}
 \end{aligned}$$

Da qui possiamo ricostruire la funzione:

$$\tilde{q}(z, s) = \sum_n \frac{Q_n}{B_n^2 + s} R_n(z)$$

e antitrasformando

$$q(z, \tau) = \sum_n Q_n R_n(z) e^{-B_n^2 \tau}$$

nel caso presente gli autovalori e le autofunzioni sono, come è ormai noto,

$$\begin{cases} B_n = (2n+1) \frac{\pi}{2a} \\ R_n(z) = \cos B_n z \end{cases}$$

e le costanti dello sviluppo della sorgente:

$$Q_n = \frac{\int_{-a}^{+a} Q_s \delta(z) R_n(z) dz}{\int_{-a}^{+a} R_n(z) \bar{R}_n(z) dz} = \frac{Q_s}{a}$$

Troviamo infine:

$$q(z, \tau) = \frac{Q_s}{a} \sum_n \cos(B_n z) e^{-B_n^2 \tau}$$

pagina intenzionalmente vuota

VII. SOLUZIONE IN GEOMETRIA NON PIANA

VII.1 Le armoniche sferiche

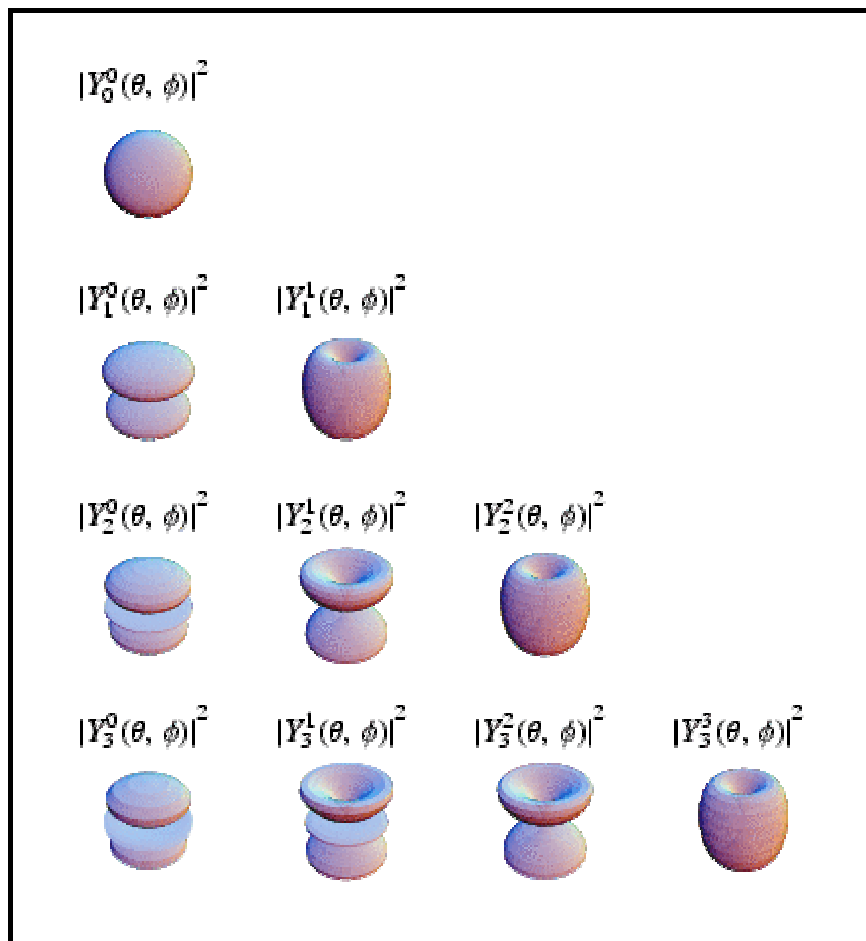
Le armoniche sferiche sono funzioni di ϑ e φ che formano un insieme ortogonale completo. La definizione generale è la seguente:

$$P_{\ell,m}(\Omega) = P_{\ell,m}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{(\ell - |m|)!}{(\ell + |m|)!}} (-1)^{\frac{1}{2}(m+|m|)} P_{\ell}^{|m|}(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

in cui

$$P_{\ell}^{|m|}(\cos \vartheta) = \frac{(\sin \vartheta)^m}{\ell! \cdot 2^{\ell}} \frac{d^{\ell+m}(\cos^2 \vartheta - 1)^{\ell}}{d(\cos \vartheta)^{\ell+m}}$$

nella figura seguente sono rappresentati i quadrati dei moduli delle armoniche sferiche dei primi tre ordini:



Queste funzioni godono, tra le altre, delle seguenti utili proprietà:

i) Relazione tra m e $-m$:

$$P_{\ell,(-m)}(\boldsymbol{\Omega}) = (-1)^m \text{CC}[P_{\ell,m}(\boldsymbol{\Omega})]$$

intendendo con CC il complesso coniugato.

ii) Ortogonalità:

$$\int_{4\pi} P_{k,n}(\boldsymbol{\Omega}) \cdot \text{CC}[P_{\ell,m}(\boldsymbol{\Omega})] d_2\boldsymbol{\Omega} = \int_{4\pi} \text{CC}[P_{k,n}(\boldsymbol{\Omega})] \cdot P_{\ell,m}(\boldsymbol{\Omega}) d_2\boldsymbol{\Omega} = \frac{4\pi}{2k+1} \cdot \delta_{k,\ell} \cdot \delta_{n,m}$$

dove δ è il solito indice di Kronecker.

Vediamo le prime armoniche sferiche:

$$\begin{aligned} P_{0,0} &= 1 & P_{2,0} &= \frac{3\cos^2\vartheta - 1}{2} \\ P_{1,0} &= \cos\vartheta & P_{2,1} &= -\sqrt{\frac{3}{2}} e^{i\varphi} \cos\vartheta \sin\vartheta \\ P_{1,1} &= \frac{-e^{i\varphi}}{\sqrt{2}} \sin\vartheta & P_{2,2} &= \sqrt{\frac{3}{8}} e^{i2\varphi} \sin^2\vartheta \end{aligned}$$

(si riconoscono subito i polinomi di Legendre di ordine 0, 1 e 2. Infatti $P_{\ell,0}(\boldsymbol{\Omega}) = P_{\ell}(\cos\vartheta)$!!).

Facciamo un breve inciso. Ricordiamo le espressioni delle tre componenti del vettore $\boldsymbol{\Omega}$:

$$\Omega_x = \sin\vartheta \cos\varphi; \quad \Omega_y = \sin\vartheta \sin\varphi; \quad \Omega_z = \cos\vartheta$$

Notiamo subito che

$$P_{1,0}(\boldsymbol{\Omega}) = \Omega_z$$

d'altra parte:

$$P_{1,\pm 1}(\boldsymbol{\Omega}) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\vartheta e^{\pm i\varphi} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} [\sin\vartheta \cos\varphi \pm i \sin\vartheta \sin\varphi] = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} [\Omega_x \pm i\Omega_y]$$

e viceversa:

$$\Omega_x = \frac{P_{1,-1}(\boldsymbol{\Omega}) - P_{1,1}(\boldsymbol{\Omega})}{\sqrt{2}}; \quad \Omega_y = i \frac{P_{1,-1}(\boldsymbol{\Omega}) + P_{1,1}(\boldsymbol{\Omega})}{\sqrt{2}}; \quad \Omega_z = P_{1,0}(\boldsymbol{\Omega})$$

Proviamo ora a sviluppare la generica funzione $f(\boldsymbol{\Omega}) = f(\vartheta, \varphi)$ in serie di armoniche sferiche:

$$f(\boldsymbol{\Omega}) = \sum_0^{\infty} \sum_{-l}^l \frac{2l+1}{4\pi} f_{\ell,m} P_{\ell,m}(\boldsymbol{\Omega})$$

Come al solito formiamo il prodotto scalare:

$$\langle P_{k,n}(\boldsymbol{\Omega}) | f(\boldsymbol{\Omega}) \rangle = \int_{4\pi} CC[P_{k,n}(\boldsymbol{\Omega})] \cdot f(\boldsymbol{\Omega}) d_2\boldsymbol{\Omega}$$

abbiamo quindi:

$$\langle P_{k,n}(\boldsymbol{\Omega}) | f(\boldsymbol{\Omega}) \rangle = \sum_0^{\infty} \ell \sum_{-\ell}^{\ell} m \frac{2\ell+1}{4\pi} f_{\ell,m} \langle P_{k,n}(\boldsymbol{\Omega}) | P_{\ell,m}(\boldsymbol{\Omega}) \rangle = \sum_0^{\infty} \ell \sum_{-\ell}^{\ell} m \frac{2\ell+1}{4\pi} f_{\ell,m} \frac{4\pi \delta_{k,\ell} \delta_{n,m}}{2k+1}$$

da cui traiamo immediatamente

$$f_{k,n} = \langle P_{k,n}(\boldsymbol{\Omega}) | f(\boldsymbol{\Omega}) \rangle$$

come ci si poteva aspettare.

VII.2 Sviluppo in serie del flusso

Applichiamo ora l'analisi precedente al problema generale dell'equazione integro differenziale per i neutroni, che nell'ipotesi di mezzo omogeneo e isotropo, e di simmetria azimutale dello scattering diventa:

$$\left[\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla + \Sigma(E) \right] f(\bar{x}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) = \int \Sigma_s(E' \rightarrow E, \boldsymbol{\Omega}' \cdot \boldsymbol{\Omega}) f(\bar{x}, E', \boldsymbol{\Omega}', t) dE' d_2\boldsymbol{\Omega}' + S(\bar{x}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$$

In primo luogo esprimiamo la funzione di scattering. Diciamo, senza pretesa di dimostrarlo, che

$$P_{\ell}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}') = \sum_{-\ell}^{+\ell} m P_{\ell,m}(\boldsymbol{\Omega}) \cdot CC[P_{\ell,m}(\boldsymbol{\Omega}')]]$$

Ora sviluppiamo in serie di polinomi di Legendre:

$$\begin{aligned} \Sigma_s(E' \rightarrow E, \boldsymbol{\Omega}' \cdot \boldsymbol{\Omega}) &= \sum_0^{\infty} \ell \frac{2\ell+1}{4\pi} \Sigma_{s,\ell}(E' \rightarrow E) P_{\ell}(\boldsymbol{\Omega}' \cdot \boldsymbol{\Omega}) = \\ &= \sum_0^{\infty} \ell \frac{2\ell+1}{4\pi} \Sigma_{s,\ell}(E' \rightarrow E) \sum_{-\ell}^{+\ell} m P_{\ell,m}(\boldsymbol{\Omega}) \cdot CC[P_{\ell,m}(\boldsymbol{\Omega}')]] \end{aligned}$$

Ora, inserendo questa espressione nell'integrale di scattering otteniamo, riordinando un po',

$$I_{sc} = \int \sum_0^{\infty} \ell \frac{2\ell+1}{4\pi} \Sigma_{s,\ell}(E' \rightarrow E) \left[\sum_{-\ell}^{+\ell} m P_{\ell,m}(\boldsymbol{\Omega}) \cdot \int_{4\pi} CC[P_{\ell,m}(\boldsymbol{\Omega}')] f(\bar{x}, E', \boldsymbol{\Omega}', t) d_2\boldsymbol{\Omega}' \right] dE'$$

ma l'integrale su Ω' ci dà proprio $f_{\ell,m}$, il coefficiente dello sviluppo in serie di f , quindi

$$I_{sc} = \int \sum_0^{\infty} \ell \frac{2\ell+1}{4\pi} \Sigma_{s,\ell}(E' \rightarrow E) \left[\sum_{-\ell}^{+\ell} m P_{\ell,m}(\Omega) \cdot f_{\ell,m}(\bar{x}, E', t) \right] dE'$$

Ora, se sviluppiamo in serie il flusso angolare f ed anche la sorgente otteniamo:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \Omega \cdot \nabla + \Sigma(E) \right] \sum_0^{\infty} \ell \sum_{-\ell}^{+\ell} m \frac{2\ell+1}{4\pi} f_{\ell,m}(\bar{x}, E, t) \cdot P_{\ell,m}(\Omega) = \\ & = \sum_0^{\infty} \ell \sum_{-\ell}^{+\ell} m \frac{2\ell+1}{4\pi} S_{\ell,m}(\bar{x}, E, t) \cdot P_{\ell,m}(\Omega) + \\ & + \sum_0^{\infty} \ell \sum_{-\ell}^{+\ell} m \frac{2\ell+1}{4\pi} P_{\ell,m}(\Omega) \int \Sigma_{s,\ell}(E' \rightarrow E) \cdot f_{\ell,m}(\bar{x}, E', t) \cdot dE' \end{aligned} \quad (VII-1)$$

Come al solito, troncheremo poi ad un ordine L , ottenendo anche qui un'approssimazione P_L .

Vediamo per $L=1$, cioè poniamo tutti i coefficienti = 0 per $\ell > 1$. Prima di procedere però investighiamo il significato dei termini interessati.

$$f_{0,0}(\bar{x}, E, t) = \int_{4\pi} f(\bar{x}, E, \Omega, t) \cdot CC[P_{0,0}(\Omega)] d_2\Omega = \int_{4\pi} f(\bar{x}, E, \Omega, t) \cdot 1 d_2\Omega = \Phi(\bar{x}, E, t)$$

cioè il flusso per unità di energia, o spettro energetico.

$$\begin{aligned} f_{1,0}(\bar{x}, E, t) &= \int_{4\pi} f(\bar{x}, E, \Omega, t) \cdot \cos \vartheta d_2\Omega = \int_{4\pi} f(\bar{x}, E, \Omega, t) \cdot \hat{z} \cdot \Omega d_2\Omega = \\ &= \hat{z} \cdot \int_{4\pi} f(\bar{x}, E, \Omega, t) \cdot \Omega d_2\Omega = \hat{z} \cdot \mathbf{J}(\bar{x}, E, t) = J_z(\bar{x}, E, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{1,\pm 1}(\bar{x}, E, t) &= \int_{4\pi} CC[P_{1,\pm 1}(\Omega)] f(\bar{x}, E, \Omega, t) \cdot d_2\Omega = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{4\pi} f(\bar{x}, E, \Omega, t) \cdot (\Omega_x \mp i\Omega_y) d_2\Omega = \\ &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{4\pi} f(\bar{x}, E, \Omega, t) \cdot (\hat{x} \mp i\hat{y}) \cdot \Omega d_2\Omega = \mp \frac{(\hat{x} \mp i\hat{y})}{\sqrt{2}} \cdot \int_{4\pi} \Omega \cdot f(\bar{x}, E, \Omega, t) d_2\Omega = \\ &= \mp \frac{(\hat{x} \mp i\hat{y})}{\sqrt{2}} \cdot \mathbf{J}(\bar{x}, E, t) = \mp \frac{J_x(\bar{x}, E, t) \mp iJ_y(\bar{x}, E, t)}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

peraltro possiamo invertire queste relazioni e trovare

$$\begin{cases} J_x(\bar{x}, E, t) = \frac{f_{1,-1}(\bar{x}, E, t) - f_{1,1}(\bar{x}, E, t)}{\sqrt{2}} \\ J_y(\bar{x}, E, t) = \frac{f_{1,1}(\bar{x}, E, t) + f_{1,-1}(\bar{x}, E, t)}{i\sqrt{2}} \\ J_z(\bar{x}, E, t) = f_{1,0}(\bar{x}, E, t) \end{cases}$$

Ora possiamo calcolare il flusso angolare nell'approssimazione P_1 :

$$\begin{aligned} f(\bar{x}, E, \mathbf{\Omega}, t) &= \frac{1}{4\pi} f_{0,0}(\bar{x}, E, t) + \frac{3}{4\pi} \sum_{-1}^1 P_{1,m}(\mathbf{\Omega}) f_{1,m}(\bar{x}, E, t) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \Phi(\bar{x}, E, t) + \frac{3}{4\pi} \left[\frac{J_x - iJ_y}{\sqrt{2}} \frac{\Omega_x + i\Omega_y}{\sqrt{2}} + \frac{J_x + iJ_y}{\sqrt{2}} \frac{\Omega_x - i\Omega_y}{\sqrt{2}} + \Omega_z J_z \right] \end{aligned}$$

Ovvero, fatti i necessari passaggi:

$$f(\bar{x}, E, \mathbf{\Omega}, t) = \frac{1}{4\pi} \Phi(\bar{x}, E, t) + \frac{3}{4\pi} \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{J}(\bar{x}, E, t)$$

Infine, per la sorgente troviamo:

$$S_{0,0}(\bar{x}, E, t) = \int_{4\pi} S(\bar{x}, E, \mathbf{\Omega}, t) \cdot CC[P_{0,0}(\mathbf{\Omega})] d_2\mathbf{\Omega} = \int_{4\pi} S(\bar{x}, E, \mathbf{\Omega}, t) \cdot 1 d_2\mathbf{\Omega} = S(\bar{x}, E, t)$$

vale a dire la sorgente complessiva, sommata su tutte le direzioni.

VII.3 L'equazione integro-differenziale del trasporto nell'approssimazione P_1

Riprendiamo ora l'equazione del trasporto, eq. (VII-1). Possiamo pensare di moltiplicare ambo i membri per $CC[P_{k,n}(\mathbf{\Omega})]$ e di integrare su $d_2\mathbf{\Omega}$. Otteniamo così, tenendo conto delle relazioni di ortogonalità:

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} \sum_{-\ell}^{+\ell} m \frac{2\ell+1}{4\pi} \left[\int_{4\pi} CC[P_{k,n}(\mathbf{\Omega})] \mathbf{\Omega} P_{\ell,m}(\mathbf{\Omega}) d_2\mathbf{\Omega} \right] \cdot \nabla f_{\ell,m}(\bar{x}, E, t) + \\ + \left[\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \Sigma(E) \right] f_{k,n}(\bar{x}, E, t) = S_{k,n}(\bar{x}, E, t) + \int \Sigma_{s,k}(E' \rightarrow E) \cdot f_{k,n}(\bar{x}, E', t) \cdot dE' \quad (VII-3) \end{aligned}$$

L'integrale a primo membro non è semplice da calcolare per il caso generale di k ed n qualunque, ma noi siamo interessati all'approssimazione P_1 , e ci accontenteremo di calcolarlo per $k=0$ e $k=1$. Per $k=0$ si ha solo il termine per $P_{0,0}(\Omega)=1$ (coniugato di se stesso). Consideriamo le tre componenti del vettore Ω :

$$\int_{4\pi} \left\| \frac{P_{1,-1} - P_{1,1}}{\sqrt{2}} \quad i \frac{P_{1,-1} + P_{1,1}}{\sqrt{2}} \quad P_{1,0} \right\| \cdot 1 \cdot P_{\ell,m}(\Omega) d_2\Omega =$$

$$= \frac{4\pi}{3} \left\| \frac{\delta_{m,-1} - \delta_{m,1}}{\sqrt{2}} \quad i \frac{\delta_{m,-1} + \delta_{m,1}}{\sqrt{2}} \quad \delta_{m,0} \right\| \delta_{\ell,1}$$

Inseriamolo nella sommatoria ed otteniamo immediatamente:

$$\sum_0^{\infty} \ell \sum_{-\ell}^{+\ell} m \frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{4\pi}{3} \delta_{\ell,1} \left\| \frac{\delta_{m,-1} - \delta_{m,1}}{\sqrt{2}} \quad i \frac{\delta_{m,-1} + \delta_{m,1}}{\sqrt{2}} \quad \delta_{m,0} \right\| \cdot \nabla f_{\ell,m}(\bar{x}, E, t) =$$

$$\nabla \cdot \sum_{-1}^{+1} m \frac{3}{4\pi} \frac{4\pi}{3} \left\| \frac{\delta_{m,-1} - \delta_{m,1}}{\sqrt{2}} \quad i \frac{\delta_{m,-1} + \delta_{m,1}}{\sqrt{2}} \quad \delta_{m,0} \right\| f_{1,m}(\bar{x}, E', t) =$$

$$\nabla \cdot \left\| \frac{f_{1,-1} - f_{1,1}}{\sqrt{2}} \quad i \frac{f_{1,-1} + f_{1,1}}{\sqrt{2}} \quad f_{1,0} \right\| = \nabla \cdot \left\| J_x \quad J_y \quad J_z \right\| = \nabla \cdot \mathbf{J}(\bar{x}, E, t)$$

In definitiva, l'equazione del trasporto per $k=0$ diviene

$$\left[\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \Sigma(E) \right] \Phi(\bar{x}, E, t) + \nabla \cdot \mathbf{J}(\bar{x}, E, t) = S_{0,0}(\bar{x}, E, t) + \int \Sigma_{s,0}(E' \rightarrow E) \Phi(\bar{x}, E', t) dE' \quad (\text{VII-5})$$

Analizziamo ora il caso $k=1$. Ora abbiamo 3 diverse armoniche sferiche da considerare: rispettivamente $P_{1,1}(\Omega)$, $P_{1,-1}(\Omega)$ e $P_{1,0}(\Omega)$. Moltiplicando ambo i membri della (VII-1) per ognuna di esse ed integrando si ottengono tre equazioni. Scriviamole in forma compatta:

$$\sum_0^{\infty} \ell \sum_{-\ell}^{+\ell} m \frac{2\ell+1}{4\pi} \left[\int_{4\pi} \text{CC} \left\| \begin{array}{c} P_{1,1}(\Omega) \\ P_{1,-1}(\Omega) \\ P_{1,0}(\Omega) \end{array} \right\| \Omega P_{\ell,m}(\Omega) d_2\Omega \right] \cdot \nabla f_{\ell,m}(\bar{x}, E, t) +$$

$$+ \left[\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \Sigma(E) \right] \left\| \begin{array}{c} f_{1,1} \\ f_{1,-1} \\ f_{1,0} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} S_{1,1} \\ S_{1,-1} \\ S_{1,0} \end{array} \right\| + \int \Sigma_{s,1}(E' \rightarrow E) \cdot \left\| \begin{array}{c} f_{1,1} \\ f_{1,-1} \\ f_{1,0} \end{array} \right\|(\bar{x}, E', t) \cdot dE' \quad (\text{VII-7})$$

Anche qui la difficoltà è tutta nell'integrale a primo membro. Calcoliamolo dapprima per

$$\ell = m = 0, \text{ ponendo come al solito } \boldsymbol{\Omega} = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{P_{1,-1} - P_{1,1}}{\sqrt{2}} & i \frac{P_{1,-1} + P_{1,1}}{\sqrt{2}} & P_{1,0} \end{array} \right\|:$$

$$\int_{4\pi} \text{CC} \left\| \begin{array}{c} P_{1,1}(\boldsymbol{\Omega}) \\ P_{1,-1}(\boldsymbol{\Omega}) \\ P_{1,0}(\boldsymbol{\Omega}) \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{ccc} \frac{P_{1,-1} - P_{1,1}}{\sqrt{2}} & i \frac{P_{1,-1} + P_{1,1}}{\sqrt{2}} & P_{1,0} \end{array} \right\| \cdot 1 \cdot d_2 \boldsymbol{\Omega} = \frac{4\pi}{3} \left\| \begin{array}{ccc} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|$$

Lasciamo come esercizio (**DA FARE**) dimostrare che per $\ell = 1$ l'integrale è nullo. Per tutti gli m .
Calcoliamo dunque la sommatoria, che tenendo appunto $\ell = m = 0$ si riduce ad un unico termine:

$$\frac{1}{3} \left\| \begin{array}{ccc} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{array} \right\| f_{0,0}(\bar{x}, E, t) = \frac{1}{3} \left\| \begin{array}{c} \frac{-\partial_x + i\partial_y}{\sqrt{2}} \\ \frac{\partial_x + i\partial_y}{\sqrt{2}} \\ \partial_z \end{array} \right\| f_{0,0}(\bar{x}, E, t)$$

e l'equazione (VII-7) diventa:

$$\frac{1}{3} \left\| \begin{array}{c} \frac{-\partial_x + i\partial_y}{\sqrt{2}} \\ \frac{\partial_x + i\partial_y}{\sqrt{2}} \\ \partial_z \end{array} \right\| f_{0,0} + \left[\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \Sigma(E) \right] \left\| \begin{array}{c} f_{1,1} \\ f_{1,-1} \\ f_{1,0} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} S_{1,1} \\ S_{1,-1} \\ S_{1,0} \end{array} \right\| + \int \Sigma_{s,1}(E' \rightarrow E) \left\| \begin{array}{c} f_{1,1} \\ f_{1,-1} \\ f_{1,0} \end{array} \right\| dE'$$

Questo è un sistema di 3 equazioni: chiamiamole a, b e c. Facciamone delle combinazioni lineari, ottenendo un nuovo sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} b - a \\ \frac{b - a}{\sqrt{2}} \\ a + b \\ i\sqrt{2} \\ c \end{array} \right.$$

Ricordando come si compongono i momenti di f per formare le componenti della corrente troviamo:

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} f_{0,0} + \left[\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \Sigma(E) \right] \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{1,-1} - S_{1,1} \\ \sqrt{2} \\ S_{1,1} + S_{1,-1} \\ i\sqrt{2} \\ S_{1,0} \end{pmatrix} + \int \Sigma_{s,1}(E' \rightarrow E) \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} dE'$$

ovvero, se indichiamo con \mathbf{S}_1 il vettore definito dal primo termine del secondo membro, possiamo scrivere:

$$\frac{1}{3} \nabla \Phi(\bar{x}, E, t) + \left[\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \Sigma(E) \right] \mathbf{J}(\bar{x}, E, t) = \mathbf{S}_1(\bar{x}, E, t) + \int \Sigma_{s,1}(E' \rightarrow E) \mathbf{J}(\bar{x}, E', t) dE'$$

Riferendoci al caso di sorgente isotropa (quindi $\mathbf{S}_1 \equiv 0$, ed $S(\bar{x}, E, \Omega, t) = S_{0,0}(\bar{x}, E, t) / 4\pi$) possiamo così scrivere un sistema di due equazioni per i due momenti del flusso:

$$\left[\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \Sigma(E) \right] \Phi(\bar{x}, E, t) + \nabla \cdot \mathbf{J}(\bar{x}, E, t) = S(\bar{x}, E, t) + \int \Sigma_{s,0}(E' \rightarrow E) \Phi(\bar{x}, E', t) dE' \quad (\text{VII-11})$$

$$\left[\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \Sigma(E) \right] \mathbf{J}(\bar{x}, E, t) + \frac{1}{3} \nabla \Phi(\bar{x}, E, t) = \int \Sigma_{s,1}(E' \rightarrow E) \mathbf{J}(\bar{x}, E', t) dE' \quad (\text{VII-12})$$

VII.4 Significato dei momenti di scattering

Vogliamo ora capire meglio cosa rappresentino i due momenti della funzione di scattering. Rivediamone la definizione, esplicitando la funzione come prodotto tra la sezione d'urto e la probabilità di transizione:

$$\Sigma_{s,\ell}(E' \rightarrow E) = \Sigma_s(E') \Pi_\ell(E' \rightarrow E) = \Sigma_s(E') 2\pi \int_{-1}^{+1} \Pi(E' \rightarrow E, \mu_0) P_\ell(\mu_0) d\mu_0$$

Ciò che serve è una definizione di $\Pi_\ell(E' \rightarrow E, \mu)$. Ricordiamo intanto che, per ogni valore di A , esiste una relazione biunivoca tra l'angolo di scattering e la perdita di energia. In particolare, sappiamo che il coseno dell'angolo di scattering nel sistema del laboratorio μ_0 , e il rapporto tra

l'energia dopo l'urto e l'energia prima dell'urto sono legati all'angolo di scattering nel sistema del baricentro, che chiameremo μ_C , dalle relazioni seguenti:

$$\mu_0 = \frac{A\mu_C + 1}{\sqrt{A^2 + 2A\mu_{CM} + 1}}$$

$$\frac{E}{E'} = \frac{A^2 + 2A\mu_C + 1}{(A + 1)^2}$$

Possiamo eliminare μ_C tra queste due equazioni, ottenendo così una relazione tra μ_0 ed il rapporto tra le energie:

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{E}{E'}} \frac{A + 1}{2} - \sqrt{\frac{E'}{E}} \frac{A - 1}{2}$$

Capiamo meglio questa espressione: essa afferma che, note l'energia E' prima dell'urto e l'energia E dopo l'urto il coseno dell'angolo di deflessione NON PUÒ CHE essere stato quello dato da questa espressione. Possiamo pertanto riscrivere la probabilità di transizione come:

$$\Pi(E' \rightarrow E, \mu_0) = \Pi\left(E' \rightarrow E, \sqrt{\frac{E}{E'}} \frac{A + 1}{2} - \sqrt{\frac{E'}{E}} \frac{A - 1}{2}\right)$$

Ricordando che la densità di probabilità per quanto attiene all'energia è data semplicemente da

$$\Pi(E' \rightarrow E) = \begin{cases} \frac{1}{(1 - \alpha)E'} & \alpha E' \leq E \leq E' \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Possiamo riscrivere il kernel come segue:

$$\Pi(E' \rightarrow E, \mu_0) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi(1 - \alpha)E'} \delta\left[\mu_0 - \left(\sqrt{\frac{E}{E'}} \frac{A + 1}{2} - \sqrt{\frac{E'}{E}} \frac{A - 1}{2}\right)\right] & \alpha E' \leq E \leq E' \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ora è facile calcolare i momenti del kernel: momento di ordine 0

$$\Pi_0(E' \rightarrow E) = \begin{cases} \frac{1}{(1-\alpha)E'} & \alpha E' \leq E \leq E' \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \frac{1}{(1-\alpha)E'} [U(E - \alpha E') - U(E - E')]$$

(l'integrale su μ_0 della funzione delta dà 1, come noto).

Ovvero, vista come funzione di E' :

$$\frac{1}{(1-\alpha)E'} \left[U(E' - E) - U\left(E' - \frac{E}{\alpha}\right) \right]$$

Momento di ordine 1:

$$\begin{aligned} \Pi_1(E' \rightarrow E, \mu_0) &= \int_{-1}^1 \mu_0 \begin{cases} \frac{1}{(1-\alpha)E'} \delta \left[\mu_0 - \left(\sqrt{\frac{E}{E'}} \frac{A+1}{2} - \sqrt{\frac{E'}{E}} \frac{A-1}{2} \right) \right] & \alpha E' \leq E \leq E' \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} d\mu_0 = \\ &= \frac{1}{(1-\alpha)E'} \left(\sqrt{\frac{E}{E'}} \frac{A+1}{2} - \sqrt{\frac{E'}{E}} \frac{A-1}{2} \right) [U(E - \alpha E') - U(E - E')] \end{aligned}$$

ovvero, come funzione di E' :

$$= \frac{1}{(1-\alpha)E'} \left(\sqrt{\frac{E}{E'}} \frac{A+1}{2} - \sqrt{\frac{E'}{E}} \frac{A-1}{2} \right) \left[U(E' - E) - U\left(E' - \frac{E}{\alpha}\right) \right]$$

Inseriamo queste espressioni nelle (VII-11,12), ottenendo quindi (ricordiamo che in realtà il limite superiore di integrazione può venire limitato ulteriormente dai valori di energia di sorgente):

$$\left[\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \Sigma(E) \right] \Phi(\bar{x}, E, t) + \nabla \cdot \mathbf{J}(\bar{x}, E, t) = S(\bar{x}, E, t) + \int_E^{\frac{1}{\alpha}E} \Sigma_s(E') \Phi(\bar{x}, E', t) \frac{dE'}{(1-\alpha)E'} \quad (\text{VII-21})$$

$$\left[\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \Sigma(E) \right] \mathbf{J}(\bar{x}, E, t) + \frac{1}{3} \nabla \Phi(\bar{x}, E, t) =$$

$$= \int_E^{\frac{1}{\alpha}E} \Sigma_s(E') \mathbf{J}(\bar{x}, E', t) \left(\sqrt{\frac{E}{E'}} \frac{A+1}{2} - \sqrt{\frac{E'}{E}} \frac{A-1}{2} \right) \frac{dE'}{(1-\alpha)E'} \quad (\text{VII-22})$$

Nel seguito faremo riferimento al caso stazionario, che si scrive:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\bar{x}, E) = S(\bar{x}, E) + \int_E^{\frac{1}{\alpha}E} \Sigma_s(E') \Phi(\bar{x}, E') \frac{dE'}{(1-\alpha)E'} - \Sigma(E) \Phi(\bar{x}, E) \quad (\text{VII-21})$$

$$\frac{1}{3} \nabla \Phi(\bar{x}, E) = \int_E^{\frac{1}{\alpha}E} \Sigma_s(E') \mathbf{J}(\bar{x}, E') \left(\sqrt{\frac{E'}{E}} \frac{A+1}{2} - \sqrt{\frac{E'}{E}} \frac{A-1}{2} \right) \frac{dE'}{(1-\alpha)E'} - \Sigma(E) \mathbf{J}(\bar{x}, E) \quad (\text{VII-22})$$

VII.5 Equazioni in termini di letargia, caso stazionario

Ricordiamo brevemente che la letargia u è legata all'energia E dalla relazione seguente, che presuppone un'energia di riferimento E_0 :

$$E = E_0 e^{-u} \quad \text{ovvero} \quad u = \ln \frac{E_0}{E} \quad (\text{VII-31})$$

Questa relazione è biunivoca, come mostrato anche dalla figura seguente; da ricordare anche il fatto che la letargia CRESCE quando l'energia DIMINUISCE, e viceversa. Facciamo la seguente osservazione: si abbia una qualunque funzione dell'energia, diciamo $f(E)$. Possiamo riesprimerla in funzione della letargia:

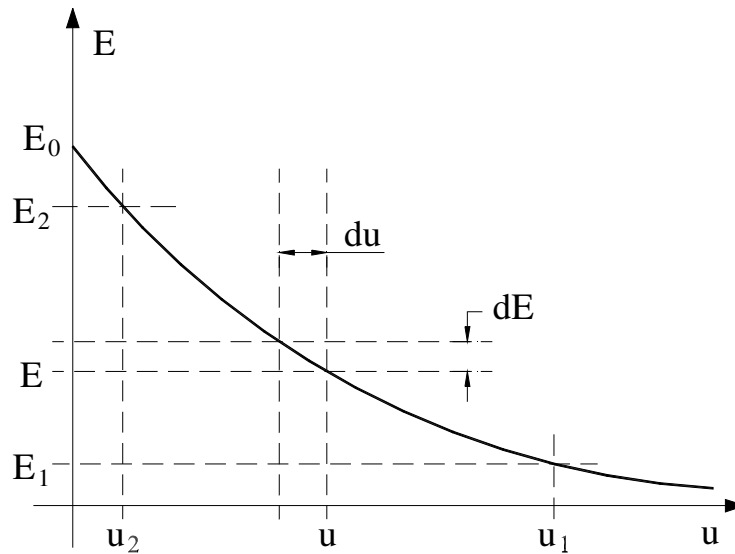
$$f(E) = f[E(u)]$$

Se vogliamo integrare questa funzione tra E_1 ed E_2 possiamo pensare di fare un cambio di variabile ed integrare tra i corrispondenti valori di letargia.

$$\int_{E_1}^{E_2} f(E) dE = \int_{u_1}^{u_2} f[E(u)] \frac{dE}{du} du = \int_{u_1}^{u_2} f[E(u)] (-E) du = \int_{u_2}^{u_1} f(u) E(u) du$$

Se peraltro consideriamo l'intervallo $(E, E + dE)$ intorno al valore E , vediamo che ad esso corrisponde l'intervallo $(u - du, u)$ intorno al valore u corrispondente ad E . Se facciamo un "integrale" di una funzione $f(E)$ sull'intervallo $(E, E + dE)$, esso dovrà essere uguale al simile "integrale" della funzione $g(u) = f[E(u)]$ sul corrispondente intervallo $(u - du, u)$, quindi:

$$-g(u) du = f(E) dE$$



Possiamo vedere la cosa anche da un punto di vista più matematico: sappiamo che abbiamo a che fare con funzioni che sono (o che contengono) densità di probabilità: consideriamo dunque una densità di probabilità $f(E)$ ed una corrispondente $g(u)$. Prendiamo le corrispondenti funzioni di ripartizione (le cumulate), diciamole $F(E)$ e $G(u)$ ora, è chiaro che la prima corrisponde alla probabilità che l'energia sia inferiore o uguale ad E , la seconda che la letargia sia inferiore o uguale ad u . Evidentemente sono due quantità del tutto diverse, datosi che la prima è l'integrale sulle energie esteso tra 0 ed E (che corrispondono alle letargie " ∞ " ed u rispettivamente), l'altra l'integrale sulle letargie esteso da 0 ad u (che invece corrispondono alle energie E_0 ed E). È chiaro che un'uguaglianza si può scrivere solo come segue:

$$G(u) = \int_0^u g(u') du' = \int_E^{E_0} f(E') dE' = 1 - \int_0^E f(E') dE' = 1 - F(E)$$

Per passare alle densità occorre fare, come sappiamo, la derivata: dunque abbiamo

$$g(u) = \frac{dG(u)}{du} = \frac{d}{du} [1 - F(E)] = -\frac{dF(E)}{du} = -\frac{dF(E)}{dE} \frac{dE}{du} = -f(E)(-E) = Ef(E)$$

(naturalmente, E qui va pensato come funzione di u , oppure u come funzione di E , secondo la direzione della trasformazione).

Riscriviamo quindi le (VII-21,22) in termini di letargia, ponendo come al solito

$$F(\bar{x}, u, t) = \Sigma(u)\Phi(\bar{x}, u, t)$$

e moltiplicando ambo i membri delle due equazioni per E: dopo qualche passaggio troviamo le equazioni cercate:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\bar{x}, u) = S(\bar{x}, u) + \frac{1}{(1-\alpha)} \int_{u-\ln\frac{1}{\alpha}}^u \frac{\Sigma_s(u')}{\Sigma(u')} F(\bar{x}, u') e^{u'-u} du' - F(\bar{x}, u) \quad (\text{VII-31})$$

$$\frac{\nabla F(\bar{x}, u)}{3\Sigma(u)} = \frac{1}{(1-\alpha)} \int_{u-\ln\frac{1}{\alpha}}^u \Sigma_s(u') \mathbf{J}(\bar{x}, u') \left(\frac{A+1}{2} e^{u'-u} - \frac{A-1}{2} \right) e^{\frac{u'-u}{2}} du' - \Sigma(u) \mathbf{J}(\bar{x}, u) \quad (\text{VII-32})$$

VII.6 Approssimazione “tipo diffusione”

Vogliamo ora trovare una soluzione approssimata, in maniera in qualche modo simile a quanto fatto per ricavare l'approssimazione di diffusione. Poniamoci quindi in ipotesi analoghe: assorbimento piccolo, niente discontinuità e via dicendo. Anche questa volta tentiamo uno sviluppo in serie dell'integrando, troncando al termine di ordine uno.

Facciamo dunque lo sviluppo:

$$\frac{\Sigma_s(u')}{\Sigma(u')} F(\bar{x}, u') = \left[1 - \frac{\Sigma_a(u')}{\Sigma(u')} \right] \left(F(\bar{x}, u) + \frac{\partial F(\bar{x}, u)}{\partial u} (u'-u) + \dots \right)$$

poiché l'assorbimento, come detto, sarà molto piccolo, volendo trascurare i termini di ordine superiore al primo rimaniamo con

$$\frac{\Sigma_s(u')}{\Sigma(u')} F(\bar{x}, u') = F(\bar{x}, u) + \frac{\partial F(\bar{x}, u)}{\partial u} (u'-u) - \frac{\Sigma_a(u')}{\Sigma(u')} F(\bar{x}, u)$$

L'integrale diviene quindi (circa) la somma di tre integrali entro cui non compare più la funzione incognita $F(\bar{x}, u')$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-\alpha)} \int_{u-\ln\frac{1}{\alpha}}^u \frac{\Sigma_s(u')}{\Sigma(u')} F(\bar{x}, u') e^{u'-u} du' &\cong F(\bar{x}, u) \frac{1}{(1-\alpha)} \int_{u-\ln\frac{1}{\alpha}}^u e^{u'-u} du' + \\ \frac{\partial F(\bar{x}, u)}{\partial u} \frac{1}{(1-\alpha)} \int_{u-\ln\frac{1}{\alpha}}^u (u'-u) e^{u'-u} du' &- F(\bar{x}, u) \frac{1}{(1-\alpha)} \int_{u-\ln\frac{1}{\alpha}}^u \frac{\Sigma_a(u')}{\Sigma(u')} e^{u'-u} du' \end{aligned}$$

Si vede facilmente che il primo integrale vale 1. Il secondo vale $-\xi$ (compito per casa: mostrare questo risultato).

Per il terzo faremo un'ulteriore approssimazione:

$$\frac{1}{(1-\alpha)} \int_{u-\ln\frac{1}{\alpha}}^u \frac{\Sigma_a(u')}{\Sigma(u')} e^{u'-u} du' = \left\langle \frac{\Sigma_a(u)}{\Sigma(u)} \right\rangle \cong \frac{\Sigma_a(u)}{\Sigma(u)}$$

Troviamo così una prima equazione:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\bar{x}, u) = S(\bar{x}, u) - \xi \frac{\partial F(\bar{x}, u)}{\partial u} - \frac{\Sigma_a(u)}{\Sigma(u)} F(\bar{x}, u)$$

La seconda equazione è più difficile da risolvere: intanto non vi è modo di far comparire il rapporto della sezione d'urto di assorbimento a quella totale (che era $\ll 1$); poi vi è l'espressione dell'energia dovuta alla probabilità di scattering. Faremo quindi un'approssimazione ancora più drastica: manteniamo solo il termine di ordine zero, cioè poniamo nell'integrale:

$$\Sigma_s(u') \mathbf{J}(\bar{x}, u') \cong \Sigma_s(u) \mathbf{J}(\bar{x}, u)$$

Osserviamo che la qualità di queste approssimazioni dipende dall'ampiezza dell'intervallo di integrazione, che a sua volta dipende da α , quindi da A . Maggiore è la massa degli atomi (cioè A), più vicino ad 1 è α , e migliore è l'approssimazione.

Osserviamo che l'integrale che rimane contiene solo funzioni note, e una volta calcolato si trova valere $2/3A$ (altro esercizio da fare a casa). Quindi troviamo:

$$\frac{\nabla F(\bar{x}, u)}{3\Sigma(u)} = \frac{2}{3A} \Sigma_s(u) \mathbf{J}(\bar{x}, u) - \Sigma(u) \mathbf{J}(\bar{x}, u) = -[\Sigma(u) - \langle \mu_0 \rangle \Sigma_s(u)] \mathbf{J}(\bar{x}, u)$$

Ricordando l'espressione per $D(u)$, vale a dire:

$$D(u) = \frac{1}{3[\Sigma(u) - \langle \mu_0 \rangle \Sigma_s(u)]}$$

troviamo infine:

$$\mathbf{J}(\bar{x}, u) = -\frac{D(u)}{\Sigma(u)} \nabla F(\bar{x}, u)$$

Possiamo ora utilizzare questa relazione (molto simile alla legge di Fick) per eliminare \mathbf{J} dalla prima equazione.

A tale scopo, facciamo la divergenza di ambo i membri:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\bar{x}, u) = -\frac{D(u)}{\Sigma(u)} \nabla^2 F(\bar{x}, u)$$

dopodiché sostituiamo tale valore nella prima equazione, ottenendo:

$$-\frac{D(u)}{\Sigma(u)} \nabla^2 F(\bar{x}, u) = S(\bar{x}, u) - \xi \frac{\partial F(\bar{x}, u)}{\partial u} - \frac{\Sigma_a(u)}{\Sigma(u)} F(\bar{x}, u)$$

Dividiamo tutto per D/Σ e moltiplichiamo per ξ , poi cambiamo di segno e riordiniamo:

$$\nabla^2 \xi F(\bar{x}, u) + \frac{\xi \Sigma(u)}{D(u)} S(\bar{x}, u) = \frac{1}{\frac{D(u)}{\xi \Sigma(u)}} \frac{\partial \xi F(\bar{x}, u)}{\partial u} + \frac{\Sigma_a(u)}{D(u)} \xi F(\bar{x}, u)$$

introduciamo l'età:

$$\tau(u) = \int_0^u \frac{D(u)}{\xi \Sigma(u)} du; \quad d\tau = \frac{D(u)}{\xi \Sigma(u)} du$$

e notiamo che, come al solito,

$$S(\bar{x}, u) du = S(\bar{x}, \tau) d\tau \Rightarrow S(\bar{x}, \tau) = \frac{\xi \Sigma(u)}{D(u)} S(\bar{x}, u)$$

Notiamo anche che:

- 1) Come ricordiamo, $\xi F(\bar{x}, u) = \xi \Sigma(u) \Phi(\bar{x}, u) = q(\bar{x}, u)$
- 2) la suddetta quantità $q(\bar{x}, u)$ rappresenta i neutroni che superano il traguardo di letargia τ ; NON è una funzione che moltiplicata per $d\tau$ mi dà la quantità di qualcosa che si trova in $(\tau, \tau + d\tau)$. Non è cioè una funzione analoga ad una densità di probabilità, bensì analoga ad una probabilità cumulativa. Vale a dire che $q(\bar{x}, \tau[u]) = q(\bar{x}, u)$

Quindi troviamo:

$$\nabla^2 q(\bar{x}, \tau) - \frac{\Sigma_a(\tau)}{D(\tau)} q(\bar{x}, \tau) + S(\bar{x}, \tau) = \frac{\partial q(\bar{x}, \tau)}{\partial \tau}$$

vale a dire l'equazione dell'età di Fermi nella forma completa.

Aggiungiamo un'ultima osservazione sulla “legge di Fick” generalizzata appena trovata. Riprendiamo l'espressione vista per la relazione tra densità di rallentamento e densità totale di collisioni:

$$\xi F(\bar{x}, u) = q(\bar{x}, u) \quad \text{ovvero} \quad F(\bar{x}, u) = \frac{1}{\xi} q(\bar{x}, u)$$

per cui l'espressione della “legge di Fick generalizzata” può riscriversi come

$$\mathbf{J}(\bar{x}, u) = -\frac{D(u)}{\Sigma(u)} \nabla F(\bar{x}, u) = -\frac{D(u)}{\xi \Sigma(u)} \nabla q(\bar{x}, u)$$

passando alla variabile età, e ricordando che la corrente è per unità di letargia, ovvero di età::

$$\mathbf{J}(\bar{x}, \tau) = \left(\frac{d\tau}{du} \right)^{-1} \mathbf{J}(\bar{x}, u) = \left(\frac{D(u)}{\xi \Sigma(u)} \right)^{-1} \times \left[-\frac{D(u)}{\xi \Sigma(u)} \nabla q(\bar{x}, u) \right] = \nabla q(\bar{x}, u)$$

e poiché invece la densità di rallentamento è “a traguardo”, cioè NON è per unità di letargia o di età e quindi $q(\bar{x}, \tau) = q(\bar{x}, u)$ troviamo infine

$$\mathbf{J}(\bar{x}, \tau) = \nabla q(\bar{x}, \tau)$$

VIII. IL PROBLEMA DIPENDENTE DAL TEMPO

VIII. 1 L'equazione dei telegrafisti

Riprendiamo in esame l'equazione integro-differenziale del trasporto per i neutroni, che nell'ipotesi di mezzo omogeneo e isotropo, e di simmetria azimutale dello scattering si scrive, come già sappiamo:

$$\left[\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{\Omega} \cdot \nabla + \Sigma(E) \right] f(\bar{x}, E, \mathbf{\Omega}, t) = \int \Sigma_s(E' \rightarrow E, \mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{\Omega}) f(\bar{x}, E', \mathbf{\Omega}', t) dE' d_2 \mathbf{\Omega}' + S(\bar{x}, E, \mathbf{\Omega}, t)$$

Prenderemo in considerazione una geometria semplice, già vista nella prima approssimazione P_1 , cioè la simmetria piana, in cui le diverse quantità sono funzione solo di z , ed è sufficiente precisare la direzione rispetto all'asse z , vale a dire il coseno $\mu = \mathbf{\Omega} \cdot \hat{z}$. Inoltre, considereremo solo il caso monoenergetico. Infine ammetteremo l'approssimazione P_1 , vale a dire che trascureremo i momenti del flusso angolare di ordine superiore ad 1. In queste condizioni tutte le funzioni si semplificano, ed in particolare:

$$f(\bar{x}, E, \mathbf{\Omega}, t) \rightarrow f(z, \mu, t)$$

$$S(\bar{x}, E, \mathbf{\Omega}, t) \rightarrow S(z, \mu, t)$$

Possiamo, come già visto più volte, sviluppare la funzione di scattering in polinomi di Legendre, cosicché:

$$\int \Sigma_s(E' \rightarrow E, \mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{\Omega}) f(z, E', \mathbf{\Omega}', t) dE' d_2 \mathbf{\Omega}' \rightarrow \sum_{\ell} \frac{2\ell+1}{2} \Sigma_{s,\ell} P_{\ell}(\mu) \int P_{\ell}(\mu') f(z, \mu', t) d\mu'$$

Riscriviamo quindi l'equazione del trasporto per questo caso particolare:

$$\left[\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial z} + \Sigma \right] f(z, \mu, t) = \sum_{\ell} \frac{2\ell+1}{2} \Sigma_{s,\ell} P_{\ell}(\mu) \int P_{\ell}(\mu') f(z, \mu', t) d\mu' + S(z, \mu, t)$$

Vogliamo ora prendere i due primi momenti di questa equazione, vale a dire vogliamo moltiplicare ambo i membri per 1 e integrare, poi ripetere moltiplicando però per μ .

1) moltiplichiamo ambo i membri per 2π , vale a dire per $2\pi P_0(\mu)$, ed integriamo sull'intervallo $[-1, +1]$:

$$\left[\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \Sigma \right] 2\pi \int_{-1}^{+1} f(z, \mu, t) d\mu + \frac{\partial}{\partial z} 2\pi \int_{-1}^{+1} \mu f(z, \mu, t) d\mu = 2\pi \int_{-1}^{+1} S(z, \mu, t) d\mu +$$

$$+ \sum_{\ell} \frac{2\ell+1}{2} \Sigma_{s,\ell} \int_{-1}^{+1} P_{\ell}(\mu) P_0(\mu) d\mu \times 2\pi \int P_{\ell}(\mu') f(z, \mu', t) d\mu'$$

eseguendo gli integrali si trova subito:

$$\left[\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \Sigma \right] \Phi(z, t) + \frac{\partial}{\partial z} J(z, t) - S(z, t) =$$

$$\sum_{\ell} \frac{2\ell+1}{2} \Sigma_{s,\ell} \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell,0} \times 2\pi \int P_{\ell}(\mu') f(z, \mu', t) d\mu' = \Sigma_s \Phi(z, t)$$

2) moltiplichiamo ambo i membri per $2\pi\mu$, vale a dire per $2\pi P_1(\mu)$, ed integriamo sull'intervallo $[-1, +1]$:

$$\left[\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \Sigma \right] 2\pi \int_{-1}^{+1} \mu f(z, \mu, t) d\mu + \frac{\partial}{\partial z} 2\pi \int_{-1}^{+1} \mu^2 f(z, \mu, t) d\mu - 2\pi \int_{-1}^{+1} \mu S(z, \mu, t) d\mu =$$

$$= \sum_{\ell} \frac{2\ell+1}{2} \Sigma_{s,\ell} \int_{-1}^{+1} P_{\ell}(\mu) P_1(\mu) d\mu \times 2\pi \int P_{\ell}(\mu') f(z, \mu', t) d\mu'$$

ora, ricordando la relazione:

$$\mu^2 = \frac{2P_2(\mu) + P_0(\mu)}{3}$$

vediamo che il secondo integrale a primo membro porge:

$$2\pi \int_{-1}^{+1} \mu^2 f(z, \mu, t) d\mu = \frac{1}{3} 2\pi \int_{-1}^{+1} [2P_2(\mu) + P_0(\mu)] f(z, \mu, t) d\mu = \frac{\Phi(z, t)}{3}$$

Considerando, come al solito, solo sorgenti isotrope troviamo infine:

$$\left[\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \Sigma \right] J(z, t) + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial z} \Phi(z, t) = \Sigma_{s,1} J(z, t)$$

Conviene riscrivere le due equazioni riordinando un po' e ricordando il significato del primo momento della funzione di scattering:

$$\frac{\partial}{\partial z} J(z, t) = -\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(z, t) - \Sigma_a \Phi(z, t) + S(z, t) \quad (\text{VIII-11})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \Phi(z, t) = -\frac{3}{v} \frac{\partial}{\partial t} J(z, t) - \frac{1}{D} J(z, t) \quad (\text{VIII-12})$$

I limiti di questa approssimazione sono (a parte la geometria, che è una limitazione ma non un'approssimazione) sostanzialmente quelli dell'equazione di diffusione e via dicendo: debole anisotropia del flusso, talché si possano trascurare tutti i momenti di ordine superiore al primo. Inoltre (e questo è MOLTO importante per un trasportista) la velocità dei neutroni è unica, quindi una perturbazione si muove con questa stessa velocità, donde una velocità di propagazione finita. Proviamo ora a derivare una singola equazione combinando le (VIII-11,12), per il caso senza sorgente.

Deriviamo pertanto ambo i membri della prima rispetto a t, ed ambo i membri della seconda rispetto a z:

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial t} J(z, t) = -\frac{1}{v} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(z, t) - \Sigma_a \frac{\partial}{\partial t} \Phi(z, t) \quad (\text{VIII-21})$$

$$D \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi(z, t) = -\frac{3D}{v} \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} J(z, t) - \frac{\partial}{\partial z} J(z, t) \quad (\text{VIII-22})$$

Ora sostituiamo la (VIII-22) e la (VIII-11) nella (VIII-21) così da eliminare $J(z, t)$ e le sue derivate:

Riordinando un po' troviamo infine:

$$D \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi(z, t) - \Sigma_a \Phi(z, t) = (1 + 3D\Sigma_a) \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(z, t) + \frac{3D}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(z, t)$$

Questa equazione è nota come "Equazione dei telegrafisti". Rispetto all'equazione di diffusione vediamo che vi è una correzione nel termine di derivata prima temporale (correzione che però sparisce nel caso senza assorbimento), ma soprattutto vi è il termine di derivata seconda rispetto al tempo che modifica in maniera fondamentale l'equazione: infatti diviene un'equazione del tipo delle onde (equazione iperbolica) e non più di tipo, appunto, diffusivo (equazione parabolica). Questo introduce una propagazione a velocità finita di una qualunque perturbazione.

pagina intenzionalmente vuota

IX. LA FUNZIONE IMPORTANZA

IX.1 La sorgente da fissione

Cosa succede se abbiamo a che fare con un mezzo moltiplicante? Dobbiamo considerare chiaramente la sorgente da fissione, nonché i neutroni ritardati. Le fissioni con i nuclei fissili della specie j producono neutroni in numero medio di ν_j per fissione e con uno spettro energetico $\chi_j(E)$ (in cui ricompriamo anche la ripartizione sull'angolo, $\frac{1}{4\pi}$)

$$\sum_j \nu_j \chi_j(E) \iint \Sigma_f^j(\mathbf{r}, E') \Phi(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}') dE' d\boldsymbol{\Omega}'$$

Questo naturalmente comprende anche i ritardati: ciò è appropriato per i problemi stazionari. Viceversa, dovendo portarli in conto separatamente dovremo scrivere che la sorgente intrinseca è

$$\sum_j \nu_j \chi_j(E) (1 - \beta_j) \iint \Sigma_f^j(\mathbf{r}, E', t) \Phi(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}', t) dE' d\boldsymbol{\Omega}' + \sum_i \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) \chi_i(E)$$

ove β_j è la frazione totale di ritardati del j -esimo fissile, e vale l'espressione

$$\beta_j = \sum_i \beta_i^j$$

con β_i^j frazione di neutroni ritardati generati nell' i -esimo gruppo da parte del j -esimo fissile, mentre $\chi_i(E)$ è lo spettro energetico con cui vengono generati i ritardati dell' i -esimo gruppo, qui un po' arbitrariamente supposto indipendente dal fissile di provenienza. Su questo si può osservare qualcosa: in realtà i precursori sono alcune decine, e sono raggruppati in sei gruppi con opportune medie. Ora i precursori sono sempre gli stessi, tuttavia sono generati in proporzioni statisticamente diverse dai differenti fissili, quindi le medie fatte per ottenere i sei gruppi rappresentativi sono un po' diverse, dando luogo a 6 frazioni e costanti di decadimento un po' diverse da fissile a fissile, vedi infatti la tabella qui sotto. Stesso discorso andrebbe ripetuto per lo spettro: ogni precursore emette sempre con lo stesso spettro, tuttavia mediando in maniera diversa per giungere ai 6 gruppi si otterranno differenze nello spettro di ogni gruppo. Trascureremo però questa differenza, assegnando un unico spettro ad ogni gruppo.

Tornando alla sorgente, considerando anche un'eventuale sorgente esterna Q , si avrà:

$$S(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) = Q(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) + \sum_j \nu_j \chi_j(E) (1 - \beta_j) \iint \Sigma_f^j(\mathbf{r}, E', t) \Phi(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}', t) dE' d\boldsymbol{\Omega}' + \sum_i \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) \chi_i(E)$$

e l'equazione del trasporto (non stazionaria) diventa

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) + \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) + \Sigma(\mathbf{r}, E, t) \Phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) =$$

$$\int_0^{\infty} \int_{4\pi} \Sigma_s(E' \rightarrow E, \boldsymbol{\Omega}' \rightarrow \boldsymbol{\Omega}; \mathbf{r}, t) \Phi(\bar{\mathbf{x}}, E', \boldsymbol{\Omega}', t) dE' d_2 \boldsymbol{\Omega}' + Q(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) +$$

$$\sum_j v_j \chi_j(E) (1 - \beta_j) \iint \Sigma_f^j(\mathbf{r}, E', t) \Phi(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}', t) dE' d\boldsymbol{\Omega}' + \sum_i \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) \chi_i(E)$$

a cui però vanno aggiunte le equazioni di evoluzione per i precursori:

$$\frac{\partial}{\partial t} C_i(\mathbf{r}, t) = \sum_j v_j \beta_j^i \iint \Sigma_f^j(\mathbf{r}, E', t) \Phi(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}', t) dE' d\boldsymbol{\Omega}' - \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t)$$

Neutroni ritardati			
Gruppo	Costante di decadimento λ [s^{-1}]	Yield (n. ritardati/fissione)	
U²³⁵ (fissione termica: $\beta = 0.0065$)			
1	0.0124	0.00022	
2	0.0305	0.00142	
3	0.111	0.00127	
4	0.301	0.00257	
5	1.14	0.00075	
6	3.01	0.00027	
Pu²³⁹ (fissione veloce: $\beta = 0.0020$)			
1	0.0129	0.000076	
2	0.0311	0.000560	
3	0.134	0.000432	
4	0.331	0.000656	
5	1.26	0.000206	
6	3.21	0.000070	
U²³³ (fissione termica: $\beta = 0.0027$)			
1	0.0126	0.00023	
2	0.0337	0.00081	
3	0.139	0.00068	
4	0.305	0.00075	
5	1.13	0.00014	
6	2.50	0.00009	
<i>Tratto da Keepin (1965).</i>			

IX.2 La funzione importanza

Poniamoci il seguente quesito:

se in un reattore esattamente critico ($k = 1$, o $\rho = 0$ che dir si voglia) in cui sono presenti N_0 neutroni (numero rigorosamente costante in virtù della esatta criticità) immettiamo un neutrone dall'esterno, una volta che si sarà esaurito il transitorio come sarà cambiato il numero N_0 ?

Evidentemente:

- a) esso non può essere diminuito
- b) può non essere cambiato (il neutrone extra è stato catturato o è sfuggito dal sistema)
- c) può essere aumentato (l'extra-neutrone ha prodotto fissione etc. etc.)

È chiaro che non posso sapere a priori cosa succederà, se b) o c) e in quest'ultimo caso con quale aumento di N_0 : posso però parlare in termini di probabilità, o ancor meglio di valori medi. In linea di massima, mi aspetto che la probabilità di un particolare esito cambi con l'energia del neutrone (se è già termico, ad esempio, avrà molta più probabilità di produrre fissione etc. che se è veloce), con la posizione in cui lo inserisco (in centro al reattore avrà molta più probabilità di produrre fissione che se è inserito alla periferia), e con la direzione con cui viene inserito (se è diretto verso il centro avrà maggiori probabilità di successo che se è diretto verso la superficie esterna). Dunque potrò parlare solo dell'aumento medio di N_0 dovuto ad un neutrone inserito nel punto \mathbf{r} , con energia E , e con direzione $\boldsymbol{\Omega}$.

Per poter determinare un valore medio faremo riferimento ad un insieme statistico, cioè inseriremo nel sistema un numero η (che supporremo sufficientemente elevato) di neutroni, tutti nel punto \mathbf{r} , con energia E , e con direzione $\boldsymbol{\Omega}$, calcoleremo di quanto aumenta N_0 , divideremo questo aumento per il numero iniziale η ed avremo l'aumento medio per singolo neutrone inserito nel punto \mathbf{r} , con energia E , e con direzione $\boldsymbol{\Omega}$, quantità che chiameremo $\Psi^*(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$.

Prima di procedere facciamo un'ultima osservazione: seguiamo un dato gruppo di neutroni durante l'evoluzione del fenomeno, e diciamo ΔN l'aumento totale di N_0 cui danno luogo asintoticamente; se andiamo a vedere dopo un certo tempo dall'inizio, alcuni saranno stati catturati, altri saranno ancora in giro, altri avranno dato luogo a fissioni. Consideriamo tutti i neutroni residui e quelli nel frattempo generati (sempre dal gruppo iniziale), nulla ci impedisce di domandarci a che aumento di N_0 daranno luogo, asintoticamente. Voi che ne pensate? Leggete

la risposta a fondo pagina*. Bene, proviamo ora a ricavare un'equazione per questa quantità $\Psi^*(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ sfruttando questa proprietà. Partiamo dunque con η neutroni inseriti nel punto \mathbf{r} , con energia E , e con direzione $\boldsymbol{\Omega}$, e che pertanto avranno un'importanza cumulativa (cioè, daranno luogo ad un numero di neutroni pari a) $\eta \Psi^*(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$. Questi neutroni formano un fascio che avanza nella direzione $\boldsymbol{\Omega}$, fin quando non interagiscono: diamo loro il tempo di spostarsi di $d\mathbf{r}$. A questo punto sarà sopravvissuto senza interagire un numero di neutroni pari a

$$\eta \exp[-\Sigma_t(\mathbf{r}, E)d\mathbf{r}] = \eta (1 - \Sigma_t(\mathbf{r}, E)d\mathbf{r} + O[dr^2])$$

E tutti questi neutroni avranno importanza

$$\Psi^*(\mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega}d\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \Psi^*(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) + \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \Psi^*(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) d\mathbf{r} + O[dr^2]$$

e dunque il loro contributo all'importanza cumulativa sarà:

$$\begin{aligned} & \eta (1 - \Sigma_t(\mathbf{r}, E)d\mathbf{r} + O[dr^2]) \times \left\{ \Psi^*(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) + \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \Psi^*(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) d\mathbf{r} + O[dr^2] \right\} \\ & = \eta \left\{ \Psi^*(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) + \left[\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \Psi^*(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) - \Sigma_t(\mathbf{r}, E)\Psi^*(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \right] d\mathbf{r} + O[dr^2] \right\} \end{aligned}$$

I neutroni che hanno interagito sono complessivamente

$$\eta \{1 - \exp[-\Sigma_t(\mathbf{r}, E)d\mathbf{r}]\} = \eta \Sigma_t(\mathbf{r}, E)d\mathbf{r} + O[dr^2]$$

di questi una frazione

$$\frac{\Sigma_c(\mathbf{r}, E)}{\Sigma_t(\mathbf{r}, E)}$$

sarà stata catturata, e quindi non dà più contributo. Una frazione

$$\frac{\Sigma_s(\mathbf{r}, E)}{\Sigma_t(\mathbf{r}, E)} \Pi(E \rightarrow E', \boldsymbol{\Omega} \rightarrow \boldsymbol{\Omega}') dE' d\boldsymbol{\Omega}'$$

sarà stata scatterata in $dE' d\boldsymbol{\Omega}'$ acquisendo pertanto l'importanza $\Psi^*(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}')$, e fornendo quindi un contributo pari a

$$\begin{aligned} & \left\{ \eta \Sigma_t(\mathbf{r}, E)d\mathbf{r} + O[dr^2] \right\} \times \frac{\Sigma_s(\mathbf{r}, E)}{\Sigma_t(\mathbf{r}, E)} \Pi(E \rightarrow E', \boldsymbol{\Omega} \rightarrow \boldsymbol{\Omega}') dE' d\boldsymbol{\Omega}' \Psi^*(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}') = \\ & \eta \Sigma_s(\mathbf{r}, E \rightarrow E', \boldsymbol{\Omega} \rightarrow \boldsymbol{\Omega}') \Psi^*(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}') dE' d\boldsymbol{\Omega}' d\mathbf{r} + O[dr^2] \end{aligned}$$

* *Risposta:* Ma ovviamente sempre ΔN !! Quelli del lotto iniziale che sono stati assorbiti non danno luogo a nulla, e quelli rimasti/generati portano avanti il fenomeno, appunto: danno luogo a quei ΔN che abbiamo detto!

Integrando su tutti i possibili $dE' d\Omega'$ otteniamo infine il contributo complessivo degli scatterati:

$$dr \iint \eta \Sigma_s(\mathbf{r}, E \rightarrow E', \Omega \rightarrow \Omega') \Psi^*(\mathbf{r}, E', \Omega') dE' d\Omega' + O[dr^2]$$

Infine, una parte di questi neutroni che hanno interagito avrà dato luogo a fissioni con il j-esimo fissile, in particolare una frazione

$$\frac{\Sigma_f^j(\mathbf{r}, E)}{\Sigma_t(\mathbf{r}, E)}$$

dando luogo per ogni fissione ad un numero di neutroni nell'intervallo $dE' d\Omega'$ pari a

$$v_j \chi_j(E') dE' d\Omega'$$

(notiamo che abbiamo implicitamente assunto che la funzione di ripartizione dell'energia sia la stessa per pronti e ritardati: non molto rigoroso). Anche qui possiamo mettere tutto insieme,

$$\left\{ \eta \Sigma_t(\mathbf{r}, E) dr + O[dr^2] \right\} \times \frac{\Sigma_f^j(\mathbf{r}, E)}{\Sigma_t(\mathbf{r}, E)} \times v_j \chi_j(E') dE' d\Omega' = \left(\eta \Sigma_f^j(\mathbf{r}, E) \times v_j \chi_j(E') dr + O[dr^2] \right) dE' d\Omega'$$

e questi neutroni vengono ad assumere un'importanza $\Psi^*(\mathbf{r}, E', \Omega')$. Integrando poi su tutte le energie e direzioni di emissione e sommando su tutti i fissili si ottiene il contributo complessivo delle fissioni all'importanza cumulativa:

$$dr \iint \eta \sum_j \left[\Sigma_f^j(\mathbf{r}, E) \times v_j \chi_j(E') \right] \Psi^*(\mathbf{r}, E', \Omega') dE' d\Omega' + O[dr^2]$$

Ora sfruttiamo il fatto che l'importanza cumulativa non cambia: quindi la somma dei termini trovati deve uguagliare il valore di partenza $\eta \Psi^*(\mathbf{r}, E, \Omega)$:

$$\begin{aligned} \eta \Psi^*(\mathbf{r}, E, \Omega) &= \eta \left\{ \Psi^*(\mathbf{r}, E, \Omega) + \left[\Omega \cdot \nabla \Psi^*(\mathbf{r}, E, \Omega) - \Sigma_t(\mathbf{r}, E) \Psi^*(\mathbf{r}, E, \Omega) \right] dr \right\} \\ &+ dr \eta \iint \Sigma_s(\mathbf{r}, E \rightarrow E', \Omega \rightarrow \Omega') \Psi^*(\mathbf{r}, E', \Omega') dE' d\Omega' \\ &+ dr \eta \iint \sum_j \left[\Sigma_f^j(\mathbf{r}, E) \times v_j \chi_j(E') \right] \Psi^*(\mathbf{r}, E', \Omega') dE' d\Omega' + O[dr^2] \end{aligned}$$

Ovvero: semplificando, dividendo tutto per η , trascurando i termini $O[dr^2]$ semplificando dr , ed infine riordinando in modo comodo:

$$\begin{aligned} -\Omega \cdot \nabla \Psi^*(\mathbf{r}, E, \Omega) + \Sigma_t(\mathbf{r}, E) \Psi^*(\mathbf{r}, E, \Omega) - \iint \Sigma_s(\mathbf{r}, E \rightarrow E', \Omega \rightarrow \Omega') \Psi^*(\mathbf{r}, E', \Omega') dE' d\Omega' = \\ \iint \sum_j \left[\Sigma_f^j(\mathbf{r}, E) \times v_j \chi_j(E') \right] \Psi^*(\mathbf{r}, E', \Omega') dE' d\Omega' \end{aligned}$$

e questa è l'equazione che cercavamo.

Facciamo ancora qualche osservazione su $\Psi^*(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$.

- 1) Per quanto detto prima al punto a), questo numero *NON PUÒ* essere minore di zero, quindi abbiamo a che fare con una funzione definita non negativa.
- 2) Per come è definito, è logico che lungo ogni direzione la funzione deve essere continua in \mathbf{r} (i.e., spostandosi di una quantità infinitesima $\boldsymbol{\Omega}d\mathbf{r}$ la funzione deve subire un cambiamento infinitesimo).
- 3) L'importanza di un neutrone che si trova sul contorno del mezzo ed ha direzione verso l'esterno del mezzo (cioè, detta \mathbf{n} la normale alla superficie esterna S , direzione tale che $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} > 0$) deve avere importanza nulla (infatti sfugge certamente, e dunque non contribuisce):

$$\Psi^*(\mathbf{r}_s, E, \boldsymbol{\Omega}) = 0 \quad \text{per } \mathbf{r}_s \in S \text{ ed } \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} > 0$$

e questa è la condizione al contorno della nostra equazione.

Nel prossimo capitolo approfondiremo alcune proprietà della funzione importanza.

IX.3 Operatori aggiunti

Sia un insieme \mathfrak{S} di funzioni f, g, h, \dots definite su un dato dominio D . Definiamo prodotto scalare tra le funzioni f e g la seguente operazione:

$$\langle f | g \rangle = \int_D f \times g$$

ad esempio le funzioni definite su $V \times [0, \infty) \times 4\pi$, con $V \subset \mathfrak{R}^3$, per cui definiremo

$$\langle f | g \rangle = \int_V \int_0^\infty \int_{4\pi} f(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) g(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) dr dE d\boldsymbol{\Omega}$$

Consideriamo due operatori \hat{A} e \hat{B} definiti sull'insieme \mathfrak{S} di cui sopra: essi si dicono aggiunti quando è verificata per ogni coppia di funzioni $f, g \in \mathfrak{S}$ la seguente relazione

$$\langle f | \hat{A}g \rangle = \langle g | \hat{B}f \rangle$$

Per completezza: un operatore è autoaggiunto quando è aggiunto di sé stesso, cioè $\forall f, g \in \mathfrak{S}$

$$\langle f | \hat{A}g \rangle = \langle g | \hat{A}f \rangle$$

Di particolare interesse per noi le funzioni definite sul suddetto prodotto cartesiano del dominio energia-angolo con un sottoinsieme V di \mathfrak{R}^3 , funzioni cioè del tipo $f(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$, e che inoltre godono della proprietà di continuità spaziale, almeno a tratti, lungo una qualunque direzione $\boldsymbol{\Omega}$. Per queste continueremo a considerare un prodotto scalare definito su volume, energia ed angolo come all'equazione precedente.

$$\langle f | g \rangle = \int_V \int_0^\infty \int_{4\pi} f(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) g(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) dr dE d\boldsymbol{\Omega}$$

Inoltre, all'interno di questo insieme distingueremo le funzioni F ed F^* , che soddisfano le condizioni al contorno seguenti sulla superficie esterna di V

$$\begin{aligned} F(\mathbf{r}_s, E, \boldsymbol{\Omega}) &= 0 & \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} < 0 \\ F^*(\mathbf{r}_s, E, \boldsymbol{\Omega}) &= 0 & \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} > 0 \end{aligned}$$

dove \mathbf{r}_s è un qualunque punto sulla superficie esterna di V ed \mathbf{n} la normale esterna alla superficie stessa nel punto considerato.

Scriviamo ora l'equazione stazionaria del trasporto tramite operatori:

$$\hat{L}\Phi = \hat{M}\Phi$$

dove

$$\hat{L}\Phi = \mathbf{\Omega} \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega}) + \Sigma(\mathbf{r}, E)\Phi(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega}) - \int_0^{\infty} \int_{4\pi} \Sigma_s(E' \rightarrow E, \mathbf{\Omega}' \rightarrow \mathbf{\Omega}; \mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega}) dE' d\mathbf{\Omega}'$$

$$\hat{M}\Phi = \sum_j v_j \chi_j(E) \iint \Sigma_f^j(\mathbf{r}, E') \Phi(\mathbf{r}, E', \mathbf{\Omega}') dE' d\mathbf{\Omega}'$$

Analogamente possiamo scrivere l'equazione per la funzione importanza

$$\hat{L}^* \Psi^* = \hat{M}^* \Psi^*$$

dove

$$\hat{L}^* \Psi^* = -\mathbf{\Omega} \cdot \nabla \Psi^*(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega}) + \Sigma_t(\mathbf{r}, E) \Psi^*(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega}) - \iint \Sigma_s(\mathbf{r}, E \rightarrow E', \mathbf{\Omega} \rightarrow \mathbf{\Omega}') \Psi^*(\mathbf{r}, E', \mathbf{\Omega}') dE' d\mathbf{\Omega}'$$

$$\hat{M}^* \Psi^* = \iint \sum_j \left[\Sigma_f^j(\mathbf{r}, E) \times v_j \chi_j(E') \right] \Psi^*(\mathbf{r}, E', \mathbf{\Omega}') dE' d\mathbf{\Omega}'$$

Osserviamo quanto segue.

$$\int \Phi (-\mathbf{\Omega} \cdot \nabla \Psi^*) d\mathbf{r} dE d\mathbf{\Omega} = - \int (\nabla \cdot \mathbf{\Omega} \Phi \Psi^* - \Psi^* \mathbf{\Omega} \cdot \nabla \Phi) d\mathbf{r} dE d\mathbf{\Omega} =$$

$$\iiint_V \int_0^{\infty} \int_{4\pi} \Psi^* \mathbf{\Omega} \cdot \nabla \Phi d\mathbf{r} dE d\mathbf{\Omega} - \iint_{S_V} \int_0^{\infty} \int_{4\pi} \mathbf{n} \cdot \mathbf{\Omega} \Phi \Psi^* dS dE d\mathbf{\Omega}$$

ove S_V è la superficie di contorno del volume V . Se limitiamo la nostra considerazione alle funzioni con le condizioni al contorno come detto, il secondo integrale nell'ultimo membro è nullo, poiché su S_V è $\Phi = 0$ (se $\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Omega} < 0$) oppure è $\Psi^* = 0$ (se $\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Omega} > 0$): rimaniamo quindi con

$$\int \Phi (-\mathbf{\Omega} \cdot \nabla \Psi^*) d\mathbf{r} dE d\mathbf{\Omega} = \int \Psi^* \mathbf{\Omega} \cdot \nabla \Phi d\mathbf{r} dE d\mathbf{\Omega}$$

Se consideriamo il secondo termine di dell'operatore \hat{L}^* abbiamo

$$\langle \Phi | \Sigma_t \Psi^* \rangle = \int \Phi(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega}) \Sigma_t(\mathbf{r}, E) \Psi^*(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega}) d\mathbf{r} dE d\mathbf{\Omega} =$$

$$\int \Psi^*(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega}) \Sigma_t(\mathbf{r}, E) \Phi(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega}) d\mathbf{r} dE d\mathbf{\Omega} = \langle \Psi^* | \Sigma_t \Phi \rangle$$

analogamente col terzo termine:

$$\begin{aligned}
 & \langle \Phi | \iint \Sigma_s(\mathbf{r}, E \rightarrow E', \boldsymbol{\Omega} \rightarrow \boldsymbol{\Omega}') \Psi^*(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}') dE' d\boldsymbol{\Omega}' \rangle = \\
 & \int \Phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \left\{ \iint \Sigma_s(\mathbf{r}, E \rightarrow E', \boldsymbol{\Omega} \rightarrow \boldsymbol{\Omega}') \Psi^*(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}') dE' d\boldsymbol{\Omega}' \right\} d\mathbf{r} dE d\boldsymbol{\Omega} = \\
 & \int \Psi^*(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}') \left\{ \iint \Sigma_s(\mathbf{r}, E \rightarrow E', \boldsymbol{\Omega} \rightarrow \boldsymbol{\Omega}') \Phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) dE d\boldsymbol{\Omega} \right\} d\mathbf{r} dE' d\boldsymbol{\Omega}' = \\
 & \int \Psi^*(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \left\{ \iint \Sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, \boldsymbol{\Omega}' \rightarrow \boldsymbol{\Omega}) \Phi(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}') dE' d\boldsymbol{\Omega}' \right\} d\mathbf{r} dE d\boldsymbol{\Omega} = \\
 & \langle \Psi^* | \iint \Sigma_s(\mathbf{r}, E \rightarrow E', \boldsymbol{\Omega} \rightarrow \boldsymbol{\Omega}') \Phi(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}') dE' d\boldsymbol{\Omega}' \rangle
 \end{aligned}$$

In definitiva possiamo dire, mettendo i tre risultati insieme,

$$\langle \Phi | \hat{L}^* \Psi^* \rangle = \langle \Psi^* | \hat{L} \Phi \rangle$$

L'identico discorso può ripetersi per l'altro operatore, trovando

$$\langle \Phi | \hat{M}^* \Psi^* \rangle = \langle \Psi^* | \hat{M} \Phi \rangle$$

pagina intenzionalmente vuota