VI. LA TEORIA DELL'ETÀ DI FERMI

VI.1 Il caso senza assorbimento

Riscriviamo l'equazione del rallentamento per $E < \alpha E_0$ e per il caso $c(E) = 1$

$$F(E) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{E}^{E/\alpha} F(E') \frac{dE'}{E'}$$

La soluzione, come è facile verificare, è del tipo

$$F(E) = \frac{C}{E}$$

dobbiamo quindi determinare la costante C. Ricordiamo che $F(E')dE'$ rappresenta il numero di neutroni che, possedendo energia compresa nell'intervallo $[E', E'+dE']$, subiscono interazione, quindi nel presente caso di $c(E) = 1$, subiscono collisione elastica.

Ricordiamo che, in accordo col modello di scattering elastico visto in precedenza, la ***densità di probabilità*** per l'energia dopo l'urto è

$$\Pi(E' \to E) = \begin{cases} \dfrac{1}{E'(1-\alpha)} & E \in [\alpha E', E'] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Facendo riferimento al caso $E' < E_0$, possiamo dire che la probabilità che dopo l'urto un neutrone si venga a trovare ad una qualunque energia compresa nell'intervallo $[\alpha E', E_1]$, con $E_1 \in [\alpha E', E']$, è data da

$$P(E \in [\alpha E', E_1]) = \frac{E_1 - \alpha E'}{E'(1-\alpha)}$$

(attenzione: è una <u>PROBABILITÀ</u>, non una ***densità di probabilità***).

A partire da questo, vogliamo calcolare la cosiddetta DENSITÀ DI RALLENTAMENTO $q(E_b)$, cioè il numero totale di neutroni che nell'unità di volume e di tempo scende sotto l'energia E_b. Vale a dire che invertiamo il problema: se richiedo che il neutrone dopo lo scattering abbia energia uguale o inferiore ad E_b, da quali energie posso partire? Come sappiamo, da qualunque energia compresa tra E_b ed $\frac{1}{\alpha} E_b$.

Per ogni energia di partenza $E' \in \left[E_b, \frac{1}{\alpha} E_b\right]$ avremo una probabilità di scendere sotto l'energia E_b data da

$$P(E' \to E < E_b) = \frac{E_b - \alpha E'}{E'(1-\alpha)}$$

Calcoliamo il numero di neutroni che nell'unità di volume e di tempo scende sotto l'energia E_b, che chiameremo DENSITÀ DI RALLENTAMENTO $q^*(E_b)$, dove abbiamo aggiunto un asterisco per ricordarci che stiamo considerando il caso senza assorbimento. Procediamo così: per ogni intervallo infinitesimo di partenza $[E', E'+dE']$ avremo un contributo $dq(E_b)$ dato dal prodotto tra il numero di collisioni per unità di tempo e di volume e la probabilità che in seguito a tali collisioni i neutroni scendano sotto la soglia E_b:

$$dq(E_b) = F(E')dE' \times \frac{E_b - \alpha E'}{E'(1-\alpha)}$$

Integrando ora su tutte le energie possibili, vale a dire $E' \in \left[E_b, \frac{1}{\alpha} E_b\right]$, otteniamo

$$q^*(E_b) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{E_b}^{E_b/\alpha} F(E') \frac{E_b - \alpha E'}{E'} dE'$$

Se inseriamo in questo integrale l'espressione $F(E) = \frac{C}{E}$ trovata poc'anzi, e ricordando l'espressione per il decremento medio logaritmico $\xi = 1 - \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \frac{1}{\alpha}$,

$$q^*(E_b) = C \cdot \xi$$

(calcolatelo come esercizio); pertanto (nel caso considerato $c(E) = 1$, cioè assenza di assorbimento) $q^*(E)$ è costante a tutte le energie.

Ora, osserviamo che in assenza di assorbimento tale numero, costante ad ogni energia, deve uguagliare il numero di neutroni da sorgente:

$$q^*(E) \frac{\text{neutroni}}{\text{cm}^3 - \text{s}} = Q \frac{\text{neutroni}}{\text{cm}^3 - \text{s}}$$

da cui si trae immediatamente il valore della costante C:

$$C = \frac{Q}{\xi}$$

In definitiva possiamo dunque scrivere

$$F(E)=\frac{Q}{\xi}\frac{1}{E}$$

od anche, riferendoci al flusso colliso,

$$\Psi(E)=\frac{Q}{\xi E\Sigma(E)}$$

Diciamo anche, senza ricavarlo, che in termini di letargia possiamo scrivere

$$q^*(u)=\xi F(u)=\xi\ \Sigma(u)\Psi(u)$$

Continuando a considerare il caso senza assorbimento, osserviamo un intervallo generico $[u_1,u_2]$: in assenza di un contributi diretto dovuto a una sorgente esterna, l'unico termine di sorgente presente in questo intervallo sarà quello dovuto al rallentamento. Avremo come al solito un contributo positivo (i neutroni che rallentando "entrano" nell'intervallo cioè superano la letargia u_1) ed uno negativo (quelli che ne "escono", cioè superano la letargia u_2). Per meglio spiegarci, consideriamo i neutroni che superano, a seguito di una collisione, la letargia u_1: tra questi ve ne saranno alcuni che la supereranno di poco, altri che la supereranno di molto, superando così anche la letargia u_2, *quindi senza fermarsi nell'intervallo* che stiamo esaminando. Pertanto il numero di neutroni che nell'unità di tempo e di volume appariranno entro l'intervallo sarà dato da quelli che superano la letargia u_1 depurati di quelli che superano anche la letargia u_2: questi ultimi infatti sono compresi nel valore $q^*(u_1)$ oltre che in $q^*(u_2)$ e quindi la sorgente netta sarà data da $q^*(u_1)-q^*(u_2)$. Veniamo ora ad un intervallo generico ma infinitesimo $[u,u+du]$, la sorgente sarà dunque data da $q^*(u)-q^*(u+du)$. Sviluppiamo tale espressione:

$$Q(u)du=q^*(u)-q^*(u+du)=q^*(u)-\left(q^*(u)+\frac{\partial q^*(u)}{\partial u}du\right)=-\frac{\partial q^*(u)}{\partial u}du$$

Vediamo l'equazione di diffusione per il caso presente, cioè senza assorbimento;

$$D\nabla^2\Psi(\overline{x},u)+Q(\overline{x},u)=0$$

Considerando la sorgente di rallentamento appena vista possiamo dunque scrivere

$$D(u)\nabla^2\Psi(\overline{x},u)=\frac{\partial q^*(\overline{x},u)}{\partial u}$$

Ma ricordando l'espressione di $q^*(\overline{x},u)$

$$q^*(\bar{x},u) = \xi\,\Sigma(u)\Psi(\bar{x},u)$$

Possiamo estrarre il flusso:

$$\Psi(\bar{x},u) = \frac{q^*(\bar{x},u)}{\xi\,\Sigma(u)}$$

possiamo comporre quest'ultima con l'equazione di diffusione ottenendo:

$$\frac{\partial q^*(\bar{x},u)}{\partial u} = D(u)\nabla^2\frac{q^*(\bar{x},u)}{\xi\,\Sigma(u)} = \frac{D(u)}{\xi\,\Sigma(u)}\nabla^2 q^*(\bar{x},u)$$

Definiamo ora la nuova quantità seguente, detta ETÀ DI FERMI:

$$d\tau = \frac{D(u)}{\xi\,\Sigma(u)}du$$

introducendola nell'espressione precedente, con semplici passaggi si ottiene l'EQUAZIONE DELL'ETÀ di Fermi in forma ristretta (cioè per mezzi non assorbenti):

$$\frac{\partial q^*(\bar{x},\tau)}{\partial \tau} = \nabla^2 q^*(\bar{x},\tau)$$

VI.2 Il caso con assorbimento

Se è presente l'assorbimento l'equazione di diffusione diviene:

$$D\nabla^2\Psi(\bar{x},u) - \Sigma_a(u)\Psi(\bar{x},u) + Q(\bar{x},u) = 0$$

e occorre considerare la densità di rallentamento in presenza di assorbimento (quindi la scriveremo senza asterisco):

$$Q(\bar{x},u) = -\frac{\partial q(\bar{x},u)}{\partial u}$$

da cui

$$D\nabla^2\Psi(\bar{x},u) - \Sigma_a(u)\Psi(\bar{x},u) = \frac{\partial q(\bar{x},u)}{\partial u}$$

Si tratta ora di definire $q(\bar{x},u)$ in questo diverso caso. Supponiamo di poter estendere la definizione data in precedenza, e continuare a scrivere

$$q(\bar{x},u) = \xi\,\Sigma(u)\Psi(\bar{x},u)$$

È chiaro quanto diremo sarà vero solo nella misura in cui è valida questa relazione tra flusso e densità di rallentamento. Per il momento la accettiamo, vedremo presto una derivazione più stringente dell'equazione dell'età in forma completa. Possiamo comunque darne un'argomentazione fisica, seppur molto qualitativa, che la rende plausibile. Riscriviamola in termini di energia:

$$q(\overline{x},E)=\xi E\Sigma(E)\Psi(\overline{x},E)$$

ora riordiniamola e moltiplichiamola per dE:

$$\Sigma(E)\Psi(\overline{x},E)dE=\frac{q(\overline{x},E)}{\xi}\frac{dE}{E}=q(\overline{x},E)\frac{d\ln E}{\xi}$$

La quantità $\frac{d\ln E}{\xi}$ è il rapporto tra il decremento logaritmico nell'intervallo e il decremento medio per collisione, possiamo quindi vederlo come la frazione di quei neutroni che scendono sotto E che rimane entro dE. Il secondo membro dell'equazione rappresenta quindi il rateo a cui i neutroni vengono resi disponibili in dE. D'altra parte, il primo membro rappresenta i neutroni che vengono "consumati" nell'intervallo dE, l'equazione propone dunque un bilancio che deve essere approssimativamente valido (l'approssimazione non è nel bilancio, chiaramente: quest'ultimo deve sempre essere verificato allo stato stazionario; l'approssimazione è nel calcolo del termine di "produzione").

Con il procedimento già visto otteniamo

$$\frac{\partial q(\overline{x},\tau)}{\partial\tau}=\nabla^2 q(\overline{x},\tau)-\frac{\Sigma_a(\tau)}{D(\tau)}q(\overline{x},\tau)$$

Siamo ulteriormente rassicurati, almeno in parte, dal fatto che l'equazione completa così scritta si riduce a quella trovata prima quando si fa tendere a zero l'assorbimento.

Possiamo pensare di cercare una relazione tra $q(\overline{x},\tau)$ e $q*(\overline{x},\tau)$. Forse è possibile scrivere

$$q(\overline{x},\tau)=p(\tau)\cdot q*(\overline{x},\tau)$$

con un'opportuna scelta di $p(\tau)$. Possiamo cioè tentare di scegliere la funzione $p(\tau)$ in modo tale che nell'equazione dell'età il termine $\frac{\Sigma_a(\tau)}{(\tau)}q(\overline{x},\tau)$ sparisca (o meglio: in modo tale il suo effetto venga incorporato nella funzione $p(\tau)$). Inseriamo quindi la posizione sopradetta nell'equazione dell'età:

$$q*(\overline{x},\tau)\frac{dp(\tau)}{d\tau}+p(\tau)\frac{\partial q*(\overline{x},\tau)}{\partial\tau}=p(\tau)\nabla^2 q*(\overline{x},\tau)-\frac{\Sigma_a(\tau)}{D(\tau)}p(\tau)q*(\overline{x},\tau)$$

Poiché $q^*(\bar{x},\tau)$ verifica l'equazione dell'età in forma ridotta, abbiamo che nell'equazione qui sopra possiamo semplificare i termini identici:

$$p(\tau)\frac{\partial q^*(\bar{x},\tau)}{\partial \tau} = p(\tau)\nabla^2 q^*(\bar{x},\tau)$$

rimanendo con

$$q^*(\bar{x},\tau)\frac{dp(\tau)}{d\tau} = -\frac{\Sigma_a(\tau)}{D(\tau)}p(\tau)q^*(\bar{x},\tau)$$

e in questa possiamo ancora semplificare il fattore $q^*(\bar{x},\tau)$ (che è diverso d zero) ottenendo infine

$$\frac{dp(\tau)}{d\tau} = -\frac{\Sigma_a(\tau)}{D(\tau)}p(\tau)$$

L'equazione per $p(\tau)$ con la condizione $p(0)=1$ porge:

$$p(\tau) = \exp\left\{-\int_0^\tau \frac{\Sigma_a(t)}{D(t)}dt\right\}$$

Pertanto possiamo costruire la soluzione come prodotto, cioè:

- risolviamo l'equazione in forma ridotta trovando $q^*(\bar{x},\tau)$
- calcoliamo $p(\tau) = \exp\left\{-\int_0^\tau \frac{\Sigma_a(t)}{D(t)}dt\right\}$
- infine scriviamo $q(\bar{x},\tau)$ come prodotto: $q(\bar{x},\tau) = q^*(\bar{x},\tau)\times\exp\left\{-\int_0^\tau \frac{\Sigma_a(t)}{D(t)}dt\right\}$

È chiaro che si avrà sempre $q(\bar{x},\tau) \le q^*(\bar{x},\tau)$

Possiamo ancora ricalcolare $p(\tau)$ come funzione della letargia:

$$p(u) = \exp\left\{-\int_0^\tau \frac{\Sigma_a(t)}{D(t)}dt\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{\xi}\int_0^u \frac{\Sigma_a(u')}{\Sigma(u')}du'\right\}$$

che forse ricorderete essere la formula di Wigner per il fattore di trasparenza.

VI.3 Presenza della sorgente

Premettiamo che la densità di rallentamento esiste indipendentemente dalla sua relazione con il flusso: è vero che è stata inizialmente derivata nelle ipotesi di assenza di assorbimento e di distanza dell'energia presa in considerazione dall'energia iniziale di sorgente: tuttavia quello che dipende da queste ipotesi è la forma di $q(\bar{x},E)$ - ovvero $q(\bar{x},u)$ - e come questa sia legata al flusso. Se queste ipotesi non sono verificate la relazione trovata cessa di essere vera (o comunque va ricavata *ex novo*), ma la quantità "densità di rallentamento $q(\bar{x},u)$" continua ad esistere, e la sorgente locale dovuta al rallentamento continua ad essere data dalla derivata di tale quantità:

$$Q_{rall}(\bar{x},u) = -\frac{\partial q(\bar{x},u)}{\partial u}$$

Ciò premesso consideriamo il caso in cui una sorgente esterna (cioè: non di rallentamento) sia presente, diciamola $S(\bar{x},u)$. Inseriamo questa nell'equazione di diffusione:

$$D\nabla^2\Psi(\bar{x},u) - \Sigma_a(u)\Psi(\bar{x},u) + S(\bar{x},u) = \frac{\partial q(\bar{x},u)}{\partial u}$$

Se a questo punto accettiamo ancora una volta la solita relazione densità di rallentamento – flusso, vale a dire:

$$\Psi(\bar{x},u) = \frac{q(\bar{x},u)}{\xi\,\Sigma(u)}$$

possiamo scrivere con procedimento analogo al precedente, che ridettagliamo qui:

$$D(u)\nabla^2\frac{q(\bar{x},u)}{\xi\,\Sigma(u)} - \Sigma_a(u)\frac{q(\bar{x},u)}{\xi\,\Sigma(u)} + S(\bar{x},u) = \frac{\partial q(\bar{x},u)}{\partial u}$$

da cui

$$\nabla^2 q(\bar{x},u) - \frac{\Sigma_a(u)}{D(u)}q(\bar{x},u) + \frac{\xi\,\Sigma(u)}{D(u)}S(\bar{x},u) = \frac{\xi\,\Sigma(u)}{D(u)}\frac{\partial q(\bar{x},u)}{\partial u}$$

Quindi, ricordando che $q(\bar{x},u)$ NON è una densità in letargia (cioè, non è per unità di letargia ma solo per unità di volume e tempo) e pertanto $q(\bar{x},\tau) = q(\bar{x},u[\tau])$, mentre la sorgente È per unità di letargia (oltreché per unità di volume e tempo) e quindi $S(\bar{x},\tau)d\tau = S(\bar{x},u)du$ da cui (v. cap. VII)

$$S(\bar{x},\tau) = S(\bar{x},u)\left[\frac{d\tau}{du}\right]^{-1} = \frac{\xi\,\Sigma(u)}{D(u)}S(\bar{x},u)$$

e quindi

$$\nabla^2 q(\overline{x},\tau)-\frac{\Sigma_a(u)}{D}q(\overline{x},\tau)+S(\overline{x},\tau)=\frac{\partial q(\overline{x},\tau)}{\partial\tau}$$

Ancora una volta possiamo dividere il problema in un calcolo di $q^*(\overline{x},\tau)$ e del fattore $p(\tau)$:

$$\begin{cases}\nabla^2 q^*(\overline{x},\tau)+S(\overline{x},\tau)=\dfrac{\partial q^*(\overline{x},\tau)}{\partial\tau}\\ p(\tau)=\exp\left\{-\displaystyle\int_0^\tau\frac{\Sigma_a(t)}{D(t)}dt\right\}\end{cases}$$

Dopodiché la soluzione si otterrà anche in questo caso come prodotto.

VI.4 Applicazioni dell'equazione dell'età

Come discusso sopra, l'obbiettivo è risolvere l'equazione nella sua forma ristretta, cioè senza assorbimento; trovata la densità di rallentamento in assenza di assorbimento $q^*(\overline{x},\tau)$ si risale poi alla soluzione completa moltiplicando per il fattore $p(\tau)$. Occorre però specificare le condizioni al contorno (riguardanti la variabile spaziale) ed "iniziali" (riguardanti l'età). Per quanto riguarda le condizioni al contorno basta considerare da dove siamo partiti – l'equazione di diffusione: è implicito quindi assumere le medesime condizioni di questa

$$\begin{cases}\text{mezzo } \textbf{\textit{infinito}}: & \lim_{\overline{x}\to\infty} q^*(\overline{x},\tau)=\lim_{\overline{x}\to\infty}\nabla q^*(\overline{x},\tau)=0\\ \text{mezzo } \textbf{\textit{finito}}: & q^*(\overline{x}_s+\hat{n}\cdot d,\tau)=0\end{cases}$$

avendo indicato con $\overline{x}_s+\hat{n}\cdot d$ il contorno estrapolato ($\overline{x}_s$ contorno fisico, $\hat{n}$ normale locale al contorno fisico, d distanza estrapolata); per la variabile età avremo invece le condizioni "iniziali" (non è un tempo, come sappiamo, ma la struttura matematica dell'equazione ci spinge a chiamarle lo stesso "iniziali"), considerando come fatto fin qui una sorgente monocromatica all'energia di riferimento $\delta(E-E_0)$, quindi a letargia zero $\delta(u)$, quindi a età zero, $\delta(\tau)$

$$\begin{cases}\lim_{\tau\to 0+} q^*(\overline{x},\tau)=Q(\overline{x})\delta(\tau)\\ \lim_{\tau\to 0-} q^*(\overline{x},\tau)=0\end{cases}$$

Affrontiamo ora alcuni problemi, cominciando dal caso di mezzo INFINITAMENTE ESTESO.

Sorgente puntiforme monocromatica in un mezzo infinito

La sorgente, pensata anche come origine delle coordinate, avrà la forma $Q_0\delta(\overline{x})\delta(\tau)$, scriviamo dunque l'equazione dell'età;

$$\nabla^2 q^*(\overline{x},\tau)+Q_0\delta(\overline{x})\delta(\tau)=\frac{\partial q^*(\overline{x},\tau)}{\partial\tau}$$

facciamo subito la trasformata di Laplace dell'equazione e delle condizioni al contorno:

$$\begin{cases}\nabla^2\tilde{q}(\overline{x},s)+Q_0\delta(\overline{x})=s\,\tilde{q}(\overline{x},s)\\ \lim_{\overline{x}\to\infty}\tilde{q}(\overline{x},s)=\lim_{\overline{x}\to\infty}\nabla\tilde{q}(\overline{x},s)=0\end{cases}$$

Facciamo poi la trasformata tridimensionale di Fourier (nei fatti, si tratta di 3 trasformate: su x, su y e su z)

$$-\omega^2\tilde{\tilde{q}}(\overline{\omega},s)+Q_0=s\,\tilde{\tilde{q}}(\overline{\omega},s)$$

troviamo successivamente:

$$\tilde{\tilde{q}}(\overline{\omega},s)=\frac{Q_0}{s+\omega^2}\quad\Rightarrow\quad\tilde{q}(\overline{\omega},\tau)=Q_0e^{-\omega^2\tau}\quad\Rightarrow\quad q^*(\overline{x},\tau)=\frac{Q_0}{(4\pi\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{r^2}{4\tau}}$$

dove si è indicato con r il modulo del vettore posizione $\overline{x}$. Pertanto, la soluzione è una gaussiana tridimensionale, a simmetria sferica come è logico, che si allarga (e si schiaccia) all'aumentare dell'età. Ad età 0 (cioè all'energia di sorgente) la gaussiana ha larghezza nulla e altezza nfinita (cioè, è una delta), al crescere dell'età tende ad avere larghezza infinita ed altezza zero.

Vogliamo ora calcolare il valor medio della generica potenza ennesima della distanza percorsa da un neutrone prima di raggiungere un'età predeterminata, chiamiamola τ_0. La probabilità che il neutrone attraversi l'età τ_0 a una distanza compresa in $(r,r+dr)$ è data da

$$P[\tau_0 \text{ in } (r,r+dr)]=\frac{q(r,\tau_0)4\pi r^2dr}{\int_0^\infty q(r,\tau_0)4\pi r^2dr}=\frac{p(\tau_0)q^*(r,\tau_0)4\pi r^2dr}{\int_0^\infty p(\tau_0)q^*(r,\tau_0)4\pi r^2dr}\frac{q^*(r,\tau_0)\,r^2dr}{\int_0^\infty q^*(r,\tau_0)\,r^2dr}=\frac{e^{-\frac{r^2}{4\tau_0}}r^2dr}{2\sqrt{\pi}\,(\tau_0)^{\frac{3}{2}}}$$

e dunque

$$\left\langle r^n\right\rangle_{\tau_0}=\frac{\int_0^\infty r^ne^{-\frac{r^2}{4\tau_0}}r^2dr}{2\sqrt{\pi}\,(\tau_0)^{\frac{3}{2}}}$$

In particolare troviamo la distanza media e la distanza quadratica media per raggiungere l'età τ:

$$\langle r\rangle = \frac{\int_0^\infty r e^{-\frac{r^2}{4\tau}} r^2 dr}{2\sqrt{\pi}\,\tau^{\frac{3}{2}}} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\tau}$$

$$\langle r^2\rangle = \frac{\int_0^\infty r^2 e^{-\frac{r^2}{4\tau}} r^2 dr}{2\sqrt{\pi}\,\tau^{\frac{3}{2}}} = 6\tau$$

Considerando in particolare l'età termica τ_{th}, la quantità $\sqrt{\tau_{th}}$ viene detta lunghezza di rallentamento. Essa è il contraltare relativo al rallentamento di quello che la lunghezza di diffusione L è appunto per la diffusione. Vediamo una tabella con le età termiche e le relative lunghezze di rallentamento per alcuni moderatori, calcolate per la consueta energia di sorgente pari a 2 MeV e l'energia termica pari a 0.025 eV (cf. Boffi, pg. 658).

Età termica e lunghezza di rallentamento		
Moderatore	τ_{th} [cm^2]	$\sqrt{\tau_{th}}$ [cm]
Acqua leggera	33	5.7
Acqua pesante	120	11
Grafite	350	18.7
Berillio	98	10

Sorgente piana infinita sul piano x-y, mezzo infinito

La sorgente avrà la forma $Q_s\delta(z)\delta(\tau)$, dove Q_s ha le dimensioni di una sorgente superficiale $cm^{-2}-s^{-1}$, scriviamo dunque l'equazione dell'età;

$$\nabla^2 q^*(z,\tau) + Q_s\delta(z)\delta(\tau) = \frac{\partial q^*(z,\tau)}{\partial\tau}$$

anche qui, facciamo subito la trasformata di Laplace dell'equazione e delle condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \nabla^2 \tilde{q}(z,s) + Q_s \delta(z) = s\,\tilde{q}(z,s) \\ \lim_{\overline{x}\to\infty} \tilde{q}(z,s) = \lim_{\overline{x}\to\infty} \nabla\tilde{q}(z,s) = 0 \end{cases}$$

Facciamo poi la trasformata di Fourier sulla variabile z:

$$-\omega^2 \tilde{\tilde{q}}(\omega,s) + Q_s = s\,\tilde{\tilde{q}}(\omega,s)$$

e al solito troviamo successivamente:

$$\tilde{\tilde{q}}(\omega,s) = \frac{Q_s}{s+\omega^2} \quad \Rightarrow \quad \tilde{q}(\omega,\tau) = Q_s e^{-\omega^2 \tau} \quad \Rightarrow \quad q^*(\overline{x},\tau) = \frac{Q_s}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{r^2}{4\tau}}$$

Equazione omogenea in mezzo finito

Partiamo come al solito dall'equazione in forma ridotta, ma senza sorgente:

$$\begin{cases} \nabla^2 q^*(\overline{x},\tau) = \dfrac{\partial q^*(\overline{x},\tau)}{\partial \tau} \\ q^*(\overline{x}_s + \hat{n}\cdot d, \tau) = 0 \end{cases}$$

tentiamo una soluzione per separazione delle variabili: poniamo $q^*(\overline{x},\tau) = R(\overline{x})T(\tau)$

$$\begin{cases} T(\tau)\nabla^2 R(\overline{x}) = R(\overline{x})\dfrac{dT(\tau)}{d\tau} \\ R(\overline{x}_s + \hat{n}\cdot d) = 0 \end{cases}$$

Da cui separando le variabili:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{R(\overline{x})}\nabla^2 R(\overline{x}) = \dfrac{1}{T(\tau)}\dfrac{dT(\tau)}{d\tau} = -B^2 \\ R(\overline{x}_s + \hat{n}\cdot d) = 0 \end{cases}$$

dove B^2 è la costante di separazione. Troviamo dunque per la parte spaziale

$$\begin{cases} \nabla^2 R(\overline{x}) = -B^2 R(\overline{x}) \\ R(\overline{x}_s + \hat{n}\cdot d) = 0 \end{cases}$$

un'equazione agli autovalori, con autovalori B_n^2 e corrispondenti autofunzioni $R_n(\bar{x})$, mentre per la parte relativa all'età scriviamo immediatamente (a meno di una costante che riassorbiremo nelle autofunzioni spaziali)

$$T_n(\tau) = e^{-B_n^2 \tau}$$

In definitiva la soluzione più generale sarà data come combinazione lineare:

$$q^*(\bar{x}, \tau) = \sum_n C_n R_n(\bar{x}) e^{-B_n^2 \tau}$$

Vediamo subito un esempio:

Sorgente piana infinita sul piano x-y, entro una lastra estesa in $(-a, a)$ *(inclusa la distanza di estrapolazione):*

In questo caso la sorgente è la medesima del caso infinito, e pertanto l'equazione dell'età rimane quella vista:

$$\frac{d^2}{dz^2} q^*(z, \tau) + Q_s \delta(z) \delta(\tau) = \frac{\partial q^*(z, \tau)}{\partial \tau}$$

inoltre trasformando secondo Laplace nella variabile età ritroviamo l'equazione trasformata del caso precedente. Tuttavia sono cambiate le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dz^2} \tilde{q}(z, s) + Q_s \delta(z) = s\, \tilde{q}(z, s) \\ \tilde{q}(\pm a, s) = 0 \end{cases}$$

In geometria finita non possiamo evidentemente ricorrere alle trasformate di Fourier, conviene invece utilizzare le autofunzioni spaziali dell'equazione omogenea sviluppando in serie di queste ultime:

$$\begin{cases} \tilde{q}(z, s) = \sum_n A_n(s) R_n(z) \\ Q_s \delta(z) = \sum_n Q_n R_n(z) \end{cases}$$

e inserire tali sviluppi nell'equazione dell'età (trasformata)

$$\frac{d^2}{dz^2} \sum_n A_n(s) R_n(z) + \sum_n Q_n R_n(z) = s \sum_n A_n(s) R_n(z)$$

trovando successivamente:

$$
\begin{aligned}
&-\sum_n B_n^2 A_n(s) R_n(z) + \sum_n Q_n R_n(z) = s \sum_n A_n(s) R_n(z) \\
&\Rightarrow \quad \sum_n \left(B_n^2 + s\right) A_n(s) R_n(z) = \sum_n Q_n R_n(z) \\
&\Rightarrow \quad \sum_n \left[\left(B_n^2 + s\right) A_n(s) - Q_n\right] R_n(z) = 0 \\
&\Rightarrow \quad \left(B_n^2 + s\right) A_n(s) - Q_n \quad \Rightarrow \quad A_n(s) = \frac{Q_n}{B_n^2 + s}
\end{aligned}
$$

Da qui possiamo ricostruire la funzione:

$$
\tilde{q}(z,s) = \sum_n \frac{Q_n}{B_n^2 + s} R_n(z)
$$

e antitrasformando

$$
q(z,\tau) = \sum_n Q_n R_n(z) e^{-B_n^2 \tau}
$$

nel caso presente gli autovalori e le autofunzioni sono, come è ormai noto,

$$
\begin{cases}
B_n = (2n+1)\dfrac{\pi}{2a} \\
R_n(z) = \cos B_n z
\end{cases}
$$

e le costanti dello sviluppo della sorgente:

$$
Q_n = \frac{\int_{-a}^{+a} Q_s \delta(z) R_n(z) dz}{\int_{-a}^{+a} R_n(z) \overline{R}_n(z) dz} = \frac{Q_s}{a}
$$

Troviamo infine:

$$
q(z,\tau) = \frac{Q_s}{a} \sum_n \cos(B_n z)\ e^{-B_n^2 \tau}
$$