

Pressione ed equazione di stato di un gas di Fermi fortemente degenere

Per ottenere la pressione e l'equazione di stato di un gas di fermioni fortemente degenere, consideriamo separatamente i due casi di $T = 0$ e $T \neq 0$.

1°) $T = 0$

In questo caso la degenerazione del gas è pressoché completa e la funzione di distribuzione può essere scritta come (supponiamo che la velocità media $\vec{v}_0 = 0$ e quindi la velocità peculiare \vec{c} è uguale a \vec{v})

$$f_F(\vec{v}) = \frac{m^3 s}{h^3} U(v_F^2 - v^2) \quad (1)$$

essendo v_F la velocità corrispondente all'energia di Fermi:

$$v_F = \left(\frac{3nh^3}{4\pi sm^3} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2)$$

ed $U(x)$ è la funzione a gradino, o funzione di Heaviside, data da

$$U(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{for } x = 0 \\ 0 & \text{for } x < 0 \end{cases} \quad (3)$$

Di qui, si ricava la n

$$n = \frac{m^3 s}{h^3} \int_0^{v_F} 4\pi v^2 dv = \frac{4\pi m^3 s}{3h^3} \left(\frac{2KT \ln(1/A)}{m} \right)^{3/2} = \frac{s}{3} a \mu_0^{3/2} \quad (4)$$

dove $a = \frac{4\pi(2m)^{3/2}}{h^3}$ richiamando il fatto che $KT \ln \left(\frac{1}{A} \right) = \mu_0 = \frac{1}{2} m v_F^2$ e che

$A = e^{\mu_0/KT}$ in cui μ_0 è il potenziale chimico.

Per la pressione p_0 abbiamo

$$p_0 = \frac{2}{3} U_0 = \frac{nm}{3} \langle v^2 \rangle = \frac{m}{3} \int_0^\infty 4\pi v^4 f(\vec{v}) dv = \frac{1}{5} \left(\frac{3}{4\pi s} \right)^{2/3} \frac{h^2}{m} n^{5/3} \quad (5)$$

dove ora U_0 è l'energia cinetica per unità di volume per $T = 0$.

Quindi la pressione di un gas di fermioni completamente degenere risulta, come deve essere, indipendente dalla temperatura.

Vale la pena di rammentare che la condizione di degenerazione pressoché completa è rappresentata tramite il criterio di degenerazione di Sommerfeld nei termini seguenti

$$\frac{nh^3}{s(2\pi mKT)^{3/2}} \gg 1 \quad (6)$$

Pertanto la degenerazione risulta più probabile se la massa m è piccola, e quindi risulta massima per un gas di elettroni. Per altri gas è più probabile che si verifichi ad elevate densità ed a basse temperature.

2°) $T \neq 0$

Per ottenere la pressione e l'equazione di stato di un gas di fermioni completamente degeneri, dobbiamo ora fare alcune approssimazioni. Per definizione, la densità è data da

$$n = \int_0^\infty 4\pi v^2 f(v) dv = \frac{m^3 s}{h^3} \int_0^\infty \frac{4\pi v^2 dv}{e^{-\frac{\mu + \frac{1}{2}mv^2}{KT}} + 1} = \frac{m^3 s}{h^3} I_1 \quad (7)$$

mentre la pressione

$$p = \frac{m}{3} \int_0^\infty 4\pi v^4 f(v) dv = \frac{m^4 s}{3h^3} \int_0^\infty \frac{4\pi v^4 dv}{e^{-\frac{\mu + \frac{1}{2}mv^2}{KT}} + 1} = \frac{m^4 s}{3h^3} I_2 \quad (8)$$

Per calcolare i due integrali delle equazioni (7) ed (8), poniamo $x = \frac{mv^2}{2KT}$ ed $x_0 = \frac{\mu}{KT}$ cosicché

$$I_1 = 2\pi \left(\frac{2KT}{m}\right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x} dx}{e^{-x_0 + x} + 1} \quad (9)$$

ed

$$I_2 = 8\pi\sqrt{2} \left(\frac{KT}{m}\right)^{5/2} \int_0^\infty \frac{x^{3/2} dx}{e^{-x_0 + x} + 1} \quad (10)$$

Questi integrali possono essere scritti come

$$I = \int_{x_0}^{\infty} \frac{x^j dx}{e^{-x_0+x+1}} + \int_0^{x_0} x^j dx - \int_0^{x_0} \frac{x^j dx}{e^{x_0-x+1}} \quad (11)$$

dove $j = \frac{1}{2}$ oppure $\frac{3}{2}$ per i due casi. A questo punto, alteriamo la variabile di integrazione nel primo e nel terzo integrale come segue

$$y = -x_0 + x \quad (12,a)$$

per il primo termine, e

$$y = x_0 - x \quad (12,b)$$

per il terzo. Ne risulta

$$I = \int_0^{x_0} x^j dx + \int_0^{\infty} \frac{(x_0+y)^j}{e^{y+1}} dy - \int_0^{x_0} \frac{(x_0-y)^j}{e^{y+1}} dy \quad (13)$$

Nel secondo e nel terzo termine, la presenza della funzione e^y ($y \geq 0$) rende le parti dei domini di integrazione prossimi ad $y = 0$, cioè $x = x_0$, dominanti, poiché danno i contributi più rilevanti al risultato finale. Pertanto risulta lecita l'approssimazione

$$f(z) = (x_0 \pm y)^j \approx x_0^j \pm y \left(\frac{df}{dz} \right)_{z=x_0} = x_0^j \pm y j x_0^{j-1} \quad (14)$$

e consente anche di considerare x_0 nel terzo integrale come ∞ . In tal modo

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{x_0} x^j dx + 2j x_0^{j-1} \int_0^{\infty} \frac{y}{e^{y+1}} dy = \\ &= \frac{x_0^{j+1}}{j+1} + 2j x_0^{j-1} \int_0^{\infty} \sum_{\alpha=0}^{\infty} (-1)^{\alpha} y e^{\alpha y} dy = \frac{x_0^{j+1}}{j+1} + 2j x_0^{j-1} \left[1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots \right] = \\ &= \frac{x_0^{j+1}}{j+1} + j x_0^{j-1} \frac{\pi^2}{6} \end{aligned} \quad (15)$$

Alfine, otteniamo per la densità, Eq.(7) ed Eq.(15) con $j = \frac{1}{2}$

$$n = \frac{as}{3} \mu^{3/2} + \frac{\pi^2}{6} (KT)^2 \frac{as}{4\sqrt{\mu}} \quad (16)$$

ove $a = \frac{4\pi(2m)^{3/2}}{h^3}$

Dall' Eq.(8) e dalla Eq.(15) con $j = \frac{3}{2}$ abbiamo per la pressione

$$p = \frac{nm}{3} \langle v^2 \rangle = \frac{2as}{3} \left\{ \frac{\mu^{5/2}}{5} + \frac{\pi^2(KT)^2}{8} \sqrt{\mu} \right\} \quad (17)$$

Ma, richiamando l' Eq.(4) si ha anche

$$\mu_0 = \left(\frac{3n}{sa} \right)^{2/3} \quad (18)$$

dove μ_0 è il potenziale chimico per $T = 0$. Quindi dalle equazioni (16) e (4)

$$\mu_0^{3/2} = \mu^{3/2} + \frac{\pi^2}{8} (KT)^2 \frac{1}{\sqrt{\mu}} \quad (19)$$

ed, effettuando qualche approssimazione,

$$\mu = \mu_0 \left[1 - \frac{1}{12} (KT)^2 \frac{1}{\mu_0^2} \right] \quad (20)$$

Ora, sostituendo questa espressione di μ nell'Eq.(17) si ottiene

$$\begin{aligned} p &= \frac{2as}{3} \left\{ \frac{\mu_0^{5/2}}{5} \left[1 - \frac{1}{12} (KT)^2 \frac{1}{\mu_0^2} \right]^{5/2} + \frac{\pi^2}{8} (KT)^2 \sqrt{\mu_0} \left[1 - \frac{1}{12} (KT)^2 \frac{1}{\mu_0^2} \right]^{1/2} \right\} \approx \\ &\approx \frac{2as}{3} \left\{ \frac{\mu_0^{5/2}}{5} + b \sqrt{\mu_0} (KT)^2 - c \frac{1}{\mu_0^{3/2}} (KT)^4 \right\} \quad (21) \end{aligned}$$

con $b = \frac{(24\pi^2-8)}{192}$ e $c = \frac{\pi^2}{192}$.

Ricordando l' Eq.(18) otteniamo l' *Equazione di Stato*

$$p = p_0 + b_1 n^{1/3} (KT)^2 - c_1 \frac{(KT)^4}{n} \quad (22)$$

dove $b_1 = 2b \left(\frac{2a}{3} \right)^{2/3}$ e $c_1 = \frac{\pi^2 sa}{192 \cdot 3}$; p_0 è la pressione per $T = 0$, vedi Eq.(5).

In realtà, quindi, la temperatura, la densità particellare e la pressione non sono quantità indipendenti in un sistema dinamico; sono invece collegate da una relazione che è l'equazione di stato.

La definizione di T in termini di energia cinetica media, $U = \frac{1}{2}m \langle v^2 \rangle$ è perciò

$$KT \approx \left(\frac{2}{3b_1} \right)^{1/2} \frac{(U-U_0)^{1/2}}{n^{1/6}} \quad (23)$$

ove U_0 è l'energia cinetica per unità di volume per $T = 0$.