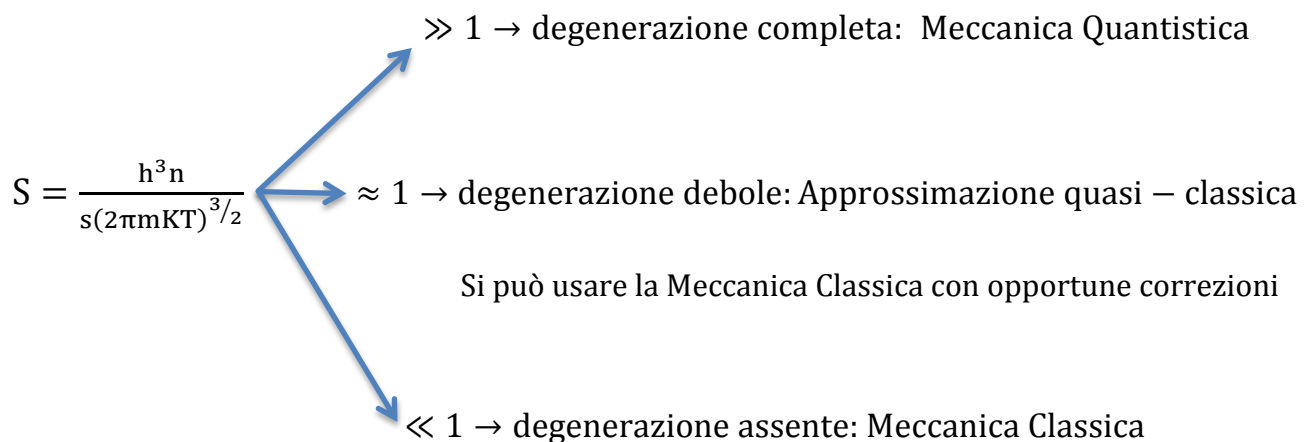


TEOREMA H E FUNZIONI DI DISTRIBUZIONE QUANTISTICHE

Cap.1 Teorema H quantistico

Consideriamo un gas costituito da una sola specie di particelle (atomi, molecole, elettroni...) che posseggono solo energia di traslazione. In base al criterio di degenerazione di Sommerfeld si può stabilire se il sistema dinamico che stiamo considerando deve essere analizzato nell'ambito della Meccanica Classica o di quella Quantistica. Più precisamente, il criterio di Sommerfeld per fermioni stabilisce quanto segue



dove h è la costante di Planck e s è il peso statistico delle particelle (è il numero di stati possibili dello spin; per esempio per gli elettroni $s = 2$), mentre m, K e T sono rispettivamente la massa delle particelle, la costante di Boltzmann, e la temperatura.

Per i bosoni, come vedremo, $S \leq 1$ e quindi la degenerazione estrema si ha per $S = 1$.

Per comprendere il significato del criterio di Sommerfeld ricordiamo che

$\lambda = h/(2\pi mKT)^{1/2}$ è la lunghezza d'onda (di De Broglie) termica media delle particelle del sistema alla temperatura T , ed è una misura dell'estensione spaziale media dei pacchetti d'onda che rappresentano le particelle. Ricordiamo anche che se indichiamo con l la distanza media fra le particelle del sistema si ha $l \approx \frac{1}{n^{1/3}}$ essendo $n = \frac{N}{V}$ la densità delle particelle. Se l è molto maggiore di λ gli effetti "ondulatori" possono essere trascurati, mentre se $\lambda/l \approx 1$ bisogna assolutamente tenerne conto.

Il criterio di Sommerfeld riassume appunto il confronto fra λ e l .

Supponiamo ora che il nostro sistema sia degenere. Partiamo quindi dall'equazione cinetica quantistica

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F} + \vec{F}_Q}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{coll}} \quad (1)$$

come può essere ottenuta nell'ambito dell'interpretazione di Bohm della Meccanica Quantistica.

Nell'Eq.(1) \vec{F} è una forza, esterna o interna, che supponiamo indipendente dalla velocità, mentre

$$F_Q = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}} U_B = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} \right) \quad (2)$$

è la forza che deriva dal potenziale quantistico di Bohm, U_B , e R è il modulo della funzione d'onda ψ

$$\psi(\vec{r}, t) = R(\vec{r}, t) \exp \left\{ \frac{iS(\vec{r}, t)}{\hbar} \right\} \quad (3)$$

$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{coll}}$ è il termine di collisione di Uehling e Uhlenbeck, che è quello appropriato per il caso che stiamo considerando.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{coll}} = \int \{f'f'_1(1 \pm \gamma f)(1 \pm \gamma f_1) - ff_1(1 \pm \gamma f')(1 \pm \gamma f'_1)\} g \sigma(g) \sin \chi d\chi d\phi d\vec{v}_1 \quad (4)$$

dove $\gamma = \frac{h^3}{sm^3}$, e il segno + vale per i bosoni mentre quello - per i fermioni.

Per capire il significato di questo termine di collisione consideriamo, come primo caso, un gas di fermioni per i quali deve valere il principio di esclusione di Pauli che impone che non più di $s \left(\frac{m}{h}\right)^3 d\vec{r}d\vec{v}$ fermioni possono stare in $d\vec{r}$ con velocità $d\vec{v}$ (essendo questo valore il numero di stati possibili in $d\vec{r}d\vec{v}$).

Così, se in $d\vec{v}d\vec{r}$ vi è già questo numero di particelle, cioè se tutti gli stati sono occupati, e se il risultato di una collisione che avviene in $d\vec{r}$ fosse quello di far entrare un'altra particella in questo $d\vec{v}$, allora la collisione non potrebbe aver luogo. Facendo poi riferimento alla funzione di distribuzione si ha che $f(\vec{r}, \vec{v})d\vec{r}d\vec{v}$ dà il numero di particelle che al tempo t sono in $d\vec{r}d\vec{v}$; così possiamo asserire che il termine

$$1 - \frac{h^3 f}{sm^3} \quad (5)$$

stabilisce di quanto è ridotta la probabilità che avvenga una collisione se essa produce come risultato una ulteriore particella in $d\vec{v}$.

Viceversa, i bosoni sottostanno ad una "affinità statistica" che genera una "attrazione" tra i bosoni aventi la stessa velocità. In altre parole, i bosoni,

contrariamente ai fermioni, tendono a “raggrupparsi” in un dominio comune.

Si ha pertanto che il termine

$$1 + \frac{h^3 f}{sm^3} \quad (6)$$

stabilisce di quanto è aumentata la probabilità che avvenga una collisione se produce una ulteriore particella in $d\vec{v}$.

Dopo questa premessa dimostriamo ora il teorema H nell’ambito della meccanica quantistica. La funzione H appropriata per questo caso è così definita

$$H(\vec{r}, t) = \frac{1}{\gamma} \int [\gamma f \ln(\gamma f) - (\gamma f \pm 1) \ln(1 \pm \gamma f)] d\vec{v} \quad (7)$$

dove l’integrazione è estesa a tutto lo spazio della velocità e dove, come in precedenza, il segno $+$ vale per i bosoni mentre quello $-$ vale per i fermioni.

Deriviamo la funzione H rispetto al tempo. Avremo

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{\gamma} \int \ln \frac{1 \pm \gamma f}{\gamma f} \frac{\partial \gamma f}{\partial t} d\vec{v} \quad (8)$$

Osserviamo a tal fine che

$$\frac{\partial}{\partial t} (\gamma f \pm 1) \ln(1 \pm \gamma f) = \left[\frac{\pm (\gamma f \pm 1)}{1 \pm \gamma f} + \ln(1 \pm \gamma f) \right] \frac{\partial \gamma f}{\partial t} =$$

$$= [1 + \ln(1 \pm \gamma f)] \frac{\partial \gamma f}{\partial t} \quad (9)$$

Se inseriamo nell'Eq.(8) il valore di $\frac{\partial f}{\partial t}$ come si può ottenere dall'Eq.(1)

otteniamo

$$\frac{\partial H}{\partial t} = - \int \ln \frac{1 \pm \gamma f}{\gamma f} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{coll}} - \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \frac{\vec{F} + \vec{F}_Q}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \right] d\vec{v} \quad (10)$$

Consideriamo separatamente i tre integrali dell'Eq.(10).

a) Poiché abbiamo supposto che \vec{F} sia indipendente dalla velocità, l'ultimo integrale da calcolare sarà

$$\int \ln \frac{1 \pm \gamma f}{\gamma f} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} d\vec{v} = \int \frac{\partial}{\partial \vec{v}} [-\gamma f \ln(\gamma f) + (\gamma f \pm 1) \ln(1 \pm \gamma f)] d\vec{v} \quad (11)$$

e per ciascuna componente

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial v_i} [-\gamma f \ln(\gamma f) + (\gamma f \pm 1) \ln(1 \pm \gamma f)] dv_i dv_j dv_k =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [-\gamma f \ln(\gamma f) + (\gamma f \pm 1) \ln(1 \pm \gamma f)]_{-\infty}^{\infty} dv_j dv_k = 0 \quad (12)$$

poiché $f(v_{i,j,k} = \pm\infty) = 0$. Quindi l'ultimo integrale è nullo.

b) Prima di considerare il penultimo termine della Eq.(10) definiamo la funzione H_0

$$H_0 = \int H d\vec{r} \quad (13)$$

dove l'integrazione è estesa a tutto il volume V occupato dal sistema.

Supponiamo inoltre che le pareti del contenitore del sistema siano perfettamente riflettenti.

Dalle Eq.(10), (12) e (13) abbiamo

$$\frac{dH_0}{dt} = - \int \ln \frac{1 \pm \gamma f}{\gamma f} \left[\left(\frac{\partial t}{\partial t} \right)_{\text{coll}} - \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \right] d\vec{v} d\vec{r} \quad (14)$$

L'ultimo integrale dell'Eq.(14) può essere così scritto

$$I = \int \ln \frac{1 \pm \gamma f}{\gamma f} \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} d\vec{v} d\vec{r} =$$

$$= \int \frac{1}{\gamma} \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} [-\gamma f \ln(\gamma f) + (\gamma f \pm 1) \ln(1 \pm \gamma f)] d\vec{v} d\vec{r} \quad (15)$$

e, facendo uso del teorema di Green*, l'integrale di volume può essere ricondotto ad un integrale di superficie. Si ha infatti

$$I = \frac{1}{\gamma} \int [\gamma f \ln(\gamma f) + (\gamma f \pm 1) \ln(1 \pm \gamma f)] v_n d\vec{v} ds \quad (16)$$

dove v_n è la componente di \vec{v} lungo la normale all'elemento di superficie ds del contenitore del sistema rivolta verso l'esterno.

Consideriamo ora il contributo a questo integrale relativo all'elemento ds la cui normale supponiamo sia diretta lungo l'asse delle x .

Essendo le pareti perfettamente riflettenti, avremo su ds

$f(v_x, v_y, v_z) = f(-v_x, v_y, v_z)$, mentre v_n è positivo per le particelle prima della riflessione su $ds (v_x > 0)$, ma negativo dopo la riflessione ($v_x < 0$).

Ne segue che l'integrale di Eq.(16) è nullo e possiamo quindi concludere che

$$\frac{dH_0}{dt} = - \int \ln \frac{1 \pm \gamma f}{\gamma f} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{coll}} d\vec{v} d\vec{r} \quad (17)$$

dove il termine di collisione è quello di Uehling e Uhlenbeck dato dall'Eq.(4).

Si ha così

$$\frac{dH_0}{dt} = - \int \ln \frac{1 \pm \gamma f_A}{\gamma f_A} (1 \pm \gamma f_A)(1 \pm \gamma f_B)(1 \pm \gamma f'_A)(1 \pm \gamma f'_B) \left\{ \frac{f'_A f'_B}{(1 \pm \gamma f'_A)(1 \pm \gamma f'_B)} - \frac{f_A f_B}{(1 \pm \gamma f_A)(1 \pm \gamma f_B)} \right\} g \sigma(g) \sin \chi d\chi d\varphi d\vec{v}_A d\vec{v}_B d\vec{r}$$

(18)

Procediamo ora come nel caso della dimostrazione del teorema H classico. Consideriamo quindi successivamente come velocità di riferimento le velocità \vec{v}_A e \vec{v}_B ; sommiamo i due valori di $\frac{dH_0}{dt}$ così ottenuti e dividiamo per 2. Quindi ripetiamo lo stesso procedimento con le velocità di riferimento \vec{v}'_A e \vec{v}'_B .

Sommiamo poi i due valori di $\frac{dH_0}{dt}$ così ottenuti e dividiamo per 2. Otteniamo

$$\frac{dH_0}{dt} = - \frac{1}{4} \int \ln \frac{f_A f_B (1 \pm \gamma f'_A)(1 \pm \gamma f'_B)}{f'_A f'_B (1 \pm \gamma f_A)(1 \pm \gamma f_B)} \{ f'_A f'_B (1 \pm \gamma f_A)(1 \pm \gamma f_B) - f_A f_B (1 \pm \gamma f'_A)(1 \pm \gamma f'_B) \} g \sigma(g) \sin \chi d\chi d\varphi d\vec{v}_A d\vec{v}_B d\vec{r}$$

(19)

da cui si evince che

$$\frac{dH_0}{dt} \leq 0$$

(20)

che esprime il teorema H quantistico.

Dall'Eq.(19) si evince anche che $\frac{dH_0}{dt} = 0$, cioè che la funzione H_0 è

indipendente dal tempo, se e solo se la funzione di distribuzione quantistica del sistema di fermioni o di bosoni soddisfa alla relazione

$$\frac{f'_A f'_B}{(1 \pm \gamma f'_A)(1 \pm \gamma f'_B)} = \frac{f_A f_B}{(1 \pm \gamma f_A)(1 \pm \gamma f_B)} \quad (21)$$

(ricordiamo che il segno $-$ vale per i fermioni, mentre il segno $+$ vale per i bosoni).

Come ultima considerazione osserviamo che anche nel caso quantistico vale, all'equilibrio, il principio del bilancio dettagliato. Infatti questo si evince facilmente dalla ancora una volta dimostrata necessità e sufficienza dell'annullamento della funzione integranda nell'integrale di collisione come condizione di equilibrio.

Cap. 2 Funzioni di Distribuzione Quantistiche

In un sistema dinamico, la cui funzione di distribuzione è governata dall'equazione cinetica, Eq. (1), le collisioni fra le particelle del sistema inducono continue variazioni della funzione di distribuzione stessa, conducendola verso l'equilibrio. Solo quando la funzione di distribuzione ha raggiunto l'equilibrio, ed è quindi costante nel tempo, il termine di collisione dell'Eq. (1) deve essere nullo.

In altre parole, la funzione di distribuzione che annulla il termine di collisione è la funzione di distribuzione di equilibrio. E' importante osservare che un fenomeno può essere stazionario, ma non in equilibrio.

Dopo questa premessa, se facciamo riferimento al termine di collisione di Uehling-Uhlembeck, Eq.(4), si ha che condizione sufficiente per l'equilibrio è che la funzione di distribuzione soddisfi alla seguente uguaglianza

$$\frac{f_{A'} f_{B'}}{(1 \pm \gamma f_{A'}) (1 \pm \gamma f_{B'})} = \frac{f_A f_B}{(1 \pm \gamma f_A) (1 \pm \gamma f_B)} \quad (22)$$

Osserviamo subito che questa relazione è uguale all' Eq. (21) che esprime la condizione necessaria e sufficiente affinché H sia indipendente dal tempo. Poiché la funzione H dipende dal tempo solo tramite la funzione f , se H dipende dal tempo necessariamente la f deve dipendere dal tempo.

Possiamo quindi concludere che l'Eq. (22) esprime la condizione necessaria e sufficiente a cui deve soddisfare la funzione di distribuzione di equilibrio.

Osserviamo, similmente a quanto si è fatto per il caso classico, come la seguente relazione

$$\ln \frac{f_{A'}}{(1 \pm \gamma f_{A'})} + \ln \frac{f_{B'}}{(1 \pm \gamma f_{B'})} = \ln \frac{f_A}{(1 \pm \gamma f_A)} + \ln \frac{f_B}{(1 \pm \gamma f_B)} \quad (23)$$

sia equivalente alla relazione di Eq. (22), e quindi l'espressione $\ln \frac{f}{(1 \pm \gamma f)}$ è una quantità invariante per urti, e che perciò deve essere come nel caso classico una combinazione lineare delle tre quantità fondamentali invarianti per urti

$$\Phi_1 = 1; \quad \vec{\Phi}_2 = m\vec{v}; \quad \Phi_3 = \frac{1}{2}mv^2 .$$

Abbiamo così

$$\ln \frac{f}{(1 \pm \gamma f)} = \alpha_1 \Phi_1 + \vec{\alpha}_2 \cdot \vec{\Phi}_2 - \alpha_3 \Phi_3 = \alpha_1 + \vec{\alpha}_2 \cdot m\vec{v} - \alpha_3 \frac{1}{2}mv^2 \quad (24)$$

che possiamo ancora riscrivere come

$$\ln \frac{f}{(1 \pm \gamma f)} = \ln \alpha_0 - \alpha_3 \frac{1}{2}mv^2 \quad (25)$$

avendo indicato con $\vec{w} = \vec{v} - \frac{\vec{\alpha}_2}{\alpha_3}$.

E' importante osservare che, essendo f funzione di \vec{r} , i parametri α_1 , $\vec{\alpha}_2$, e α_3 possono essere a loro volta funzioni di \vec{r} .

Dall'Eq. (25) otteniamo

$$\frac{f}{(1 \pm \gamma f)} = \frac{\alpha_0}{e^{\alpha_3 \frac{1}{2}mv^2}} \quad (26)$$

e quindi

$$f = \frac{\alpha_0}{e^{\alpha_3 \frac{1}{2}mv^2} \mp \gamma \alpha_0} = \frac{1}{\gamma \left(A e^{\alpha_3 \frac{1}{2}mv^2} \mp 1 \right)} \quad (27)$$

avendo posto $a = \frac{1}{\gamma \alpha_0}$.

L'Eq. (27) può anche scriversi

$$f = \frac{1}{\gamma} \frac{\alpha e^{-\alpha_3 \frac{1}{2} m w^2}}{1 \mp \alpha e^{-\alpha_3 \frac{1}{2} m w^2}} \quad (28)$$

avendo ora semplicemente posto $\alpha = \frac{1}{A}$.

Ora, se $\alpha < 1$, possiamo sviluppare la funzione f in serie di Taylor, e poi integrare rispetto a \vec{w} per ottenere la densità n . Si ha così

$$n = \frac{s m^3}{h^3} \int \left\{ \alpha e^{-\frac{\alpha_3 m}{2} w^2} \mp \alpha^2 e^{-\frac{2\alpha_3 m}{2} w^2} + \alpha^3 e^{-\frac{3\alpha_3 m}{2} w^2} \mp \dots \right\} d\vec{w} \quad (29)$$

dove il segno meno va preso per i fermioni, mentre quello più per i bosoni, e dove s rappresenta la molteplicità statistica di uno stato, che già introducemmo con il termine di collisione di Uehling-Uhlenbeck nell'espressione (4).

Si potrà vedere, ed è interessante osservarlo, come la condizione su $\alpha < 1$ si riconduca molto organicamente al criterio di degenerazione di Sommerfeld.

Se ora quindi si inverte la serie, si ottiene

$$\alpha = \frac{h^3 n \alpha_3^{3/2}}{s (2\pi m)^{3/2}} \pm \frac{h^6 n^2 \alpha_3^3}{2^{3/2} s^2 (2\pi m)^3} + \dots \quad (30)$$

ove ora il segno '+' è per i fermioni e quello '-' per i bosoni.

Pertanto

$$f = n \left(\frac{m \alpha_3}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{\alpha_3 m}{2} w^2} \pm \frac{h^3 n \alpha_3^3}{s (2\pi)^3} \left(\frac{1}{2^{3/2}} e^{-\frac{\alpha_3 m}{2} w^2} - e^{-\frac{2\alpha_3 m}{2} w^2} \right) + \dots \quad (31)$$

espressione che ci dà la correzione della meccanica classica fino all'ordine di h^3 .

Se $\alpha \ll 1$ che, come vedremo, corrisponde al caso di degenerazione assente (e quindi siamo nell'ambito della meccanica classica), possiamo troncare le serie di Eqq. (29) (30) e

(31) al primo termine, con l'ovvia necessità che il troncamento della Eq. (31) ci porga la distribuzione maxwelliana, il che si verifica solo qualora sia $\alpha_3 = \frac{1}{kT}$.

Orbene, con questa assunzione riconduciamo anche il parametro α dell'Eq. (30) al valore

$$\alpha = \frac{h^3 n}{s(2\pi m k T)^{3/2}} \quad (32)$$

che riproduce proprio il parametro S di Sommerfeld che abbiamo visto e discusso all'inizio di questa trattazione. Perciò vediamo, come appena anticipato, che l'assunzione $\alpha \ll 1$ corrisponde esattamente al caso di degenerazione pressoché assente fornendo un quadro coerente dal punto di vista fisico.

Vale ora la pena di soffermarsi in una riflessione sulla natura dei metodi che stiamo utilizzando. Nel caso classico, come vedemmo, il coefficiente α_3 fu ricavato attraverso la posizione $\frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}m\langle c^2 \rangle$, dove \vec{c} rappresentava la velocità peculiare delle particelle. Su quale base si fece questa assunzione, che a prima vista potrebbe apparire arbitraria? La ragione di questo è che così facendo si riproduce la ben nota equazione termodinamica di stato dei gas ideali $p = nkT$.

Abbiamo quindi ottenuto in questo modo un'informazione più raffinata, relativa alla distribuzione delle velocità delle particelle all'equilibrio, da una relazione di carattere assai più indistinto come la legge di stato che, come ogni relazione termodinamica, descrive il sistema senza distinguere tempo, luogo ed, appunto, le velocità.

Nel caso quantistico, invece, non possiamo far la stessa cosa in senso stretto, poiché non disponiamo dell'equazione di stato quantistica, che dovremo invece ricavare. Quindi? Sfruttiamo allora il fatto che per $\alpha \ll 1$, possiamo desumere il valore del parametro costante α_3 da quello che questo assume nella distribuzione maxwelliana, fondata sulla fisica classica (Principio di Corrispondenza, per quelli a cui piacciono queste cose..). Abbiamo poi appena visto che, risultando α coincidente con il parametro S di Sommerfeld, questa operazione, di per sé formalmente corretta, lo risulta anche fisicamente. Si tratta, a ben vedere, di un artificio piuttosto elegante, che ci consente ancora una volta di ottenere una informazione più dettagliata utilizzando come condizione di contorno una informazione più grossolana, in questo caso classica, e che ci permette altresì di mantenere le vie aperte per ricavare una legge di stato quantistica. Questa mostrerà, lo anticipiamo qui, come in un gas ideale, di particelle, cioè, non sottoposte ad alcun campo di forza fondamentale, vi sia tuttavia un termine di

interazione di natura puramente quantistica, che ricaveremo ed esibiremo con qualche meraviglia al lettore nel seguito. In definitiva avevamo ricavato una legge di distribuzione fisico cinetica poggiando su una relazione termodinamica. Ora, quando non sarebbe stato più possibile farlo, per mancanza di una relazione di stato accettabile, ci siamo appoggiati sulla distribuzione cinetica di equilibrio classica, per addentrarci ancora un poco di più nel cuore della descrizione dei fenomeni naturali.

Notiamo, concluso questo inciso, di dovere ancora ricavare il parametro $\vec{\alpha}_2$. Infatti nell'Eq. (27) compare la velocità \vec{w} espressa da $\vec{w} = \vec{v} - \frac{\vec{\alpha}_2}{\alpha_3}$.

Se indichiamo ora con \vec{v}_0 la velocità media delle particelle (fermioni o bosoni che siano) abbiamo che

$$n\vec{v}_0 = \int \vec{v} f d\vec{v} = \int \left(\frac{\vec{\alpha}_2}{\alpha_3} + \vec{w} \right) f d\vec{v} = n \frac{\vec{\alpha}_2}{\alpha_3} + \frac{sm^3}{h^3} \int \frac{\vec{w} d\vec{w}}{Ae^{\frac{mw^2}{2kT} \mp 1}} \quad (33)$$

L'integrale di Eq.(33) risulta nullo, essendo un integrale di una funzione dispari nel dominio simmetrico fra $-\infty$ e $+\infty$, per ogni componente di \vec{w} .

Si ha allora

$$\frac{\vec{\alpha}_2}{\alpha_3} = \vec{v}_0 \quad (34)$$

E $\vec{w} = \vec{v} - \vec{v}_0$ è la “velocità peculiare”, cioè la velocità riferita alla velocità media, cioè la “velocità random” o “velocità termica”.

Abbiamo così che la distribuzione di equilibrio dei fermioni (segno +) e dei bosoni (segno -) è data da

$$f(\vec{r}, w) = \frac{sm^3}{h^3} \frac{1}{Ae^{\frac{mw^2}{2kT} \mp 1}} \quad (35)$$

Ci si può chiedere quale sia il significato fisico del parametro A e quali condizioni debbano soddisfare la densità, la temperatura ed il parametro A in un sistema all'equilibrio termodinamico.

Per rispondere a questa domanda sostituiamo la funzione di equilibrio, Eq. (35), nell'equazione cinetica Eq. (1) per il caso $\vec{v}_0 = 0$ ($\vec{w} = \vec{v}$) con ovviamente $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ e $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{coll}} = 0$.

Il risultato è che deve essere soddisfatta la seguente equazione

$$KT \frac{\partial \ln A}{\partial \vec{r}} - \frac{mv^2}{2T} \frac{\partial T}{\partial \vec{r}} + \vec{F} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left(\frac{\nabla^2 R}{R} \right) = \vec{0} \quad (36)$$

Poiché quest'equazione è una identità in \vec{V} , è chiaro che il termine proporzionale a v^2 deve annullarsi separatamente, essendo gli altri termini indipendenti da \vec{V} .

Così, la *prima condizione di equilibrio* è

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{r}} = \vec{0} \quad (37)$$

cioè all'equilibrio la temperatura deve essere costante.

Deve poi valere identicamente la relazione

$$\vec{F} = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left[KT \ln A + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} \right] = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \quad (39)$$

Perciò lo stato stazionario è possibile solo se \vec{F} è il gradiente di un potenziale.

Questa è la *seconda condizione di equilibrio*. Pertanto l'Eq.(36) diviene

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left[KT \ln A - U + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} \right] = \vec{0} \quad (39)$$

Relazione che vale tanto per i fermioni quanto per i bosoni, e che impone all'espressione fra le parentesi quadre di essere costante. Indichiamo ora con C questa costante

Dobbiamo ora mostrare, così come lo si può dedurre dalla precedente equazione (39), quale sia il significato del parametro A . Eseguiamo questa analisi, in prima battuta, per il caso $U = 0$.

In analogia con il caso classico, introduciamo formalmente il "potenziale chimico" μ_0 tramite posizione

$$A = e^{-\frac{\mu_0}{kT}} \quad (40)$$

ottenendo immediatamente dall'espressione (39)

$$C + \mu_0 = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} = -U_Q \quad (41)$$

dove U_Q , così definito è, lo ricordiamo, il potenziale di Bohm.

E' ora certamente opportuno soffermarsi un momento, per attendere ad una riflessione. Se consideriamo un qualsiasi sistema dinamico, per esempio un liquido, noi sappiamo che ciascuna molecola è legata alle altre dalle forze di coesione proprie di quel liquido. Da ciò consegue che se vogliamo estrarre una molecola dal liquido ed allontanarla fino a dove le forze di coesione sono nulle, allora dobbiamo spendere una determinata quantità di energia. Questa energia è rappresentata proprio dal potenziale chimico. Dall'Eq. (41) si vede però che, anche nel caso di un gas ideale (per esempio di fermioni) si ha che $\mu_0 = -U_Q$. Questo significa qualcosa di inaspettato: ossia che nel caso di fermioni (ovvero nell'ambito della meccanica quantistica) anche per un gas ideale, per il quale - lo ricordiamo - non si considera afferente nessuna delle interazioni naturali note, sussiste comunque un potenziale chimico, che viene generato proprio dal potenziale quantistico di Bohm, e di cui bisogna sempre tenere conto.

Nel caso poi di $U \neq 0$ si otterrà un valore complessivo

$$-\mu = U_Q + U = -\mu_0 + U \quad (42)$$

che, esplicitamente, porge la seguente espressione

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 R + UR = -\mu R \quad (43)$$

che non è altro che l'equazione di Schrödinger stazionaria e che costituisce la terza condizione di equilibrio.

In conclusione, la funzione di distribuzione per fermioni è data da

$$f(\vec{r}, w) = \frac{sm^3}{h^3} \frac{1}{e^{\frac{-\mu_0 + U(\vec{r}) + \frac{1}{2}mw^2}{KT}} + 1} \quad (44)$$

Il parametro $\alpha = A^{-1} = e^{\frac{\mu_0}{KT}}$ può assumere, nel caso dei fermioni, tutti i valori compresi fra 0 e ∞ , e quindi $-\infty < \mu_0 < \infty$.

Come abbiamo visto, nel caso di $\alpha \ll 1$, che corrisponde ad un valore negativo di μ_0 , la degenerazione è molto debole, mentre per $\alpha \gg 1$ (e quindi $\mu_0 \gg 0$) la degenerazione è estrema.

Per quanto riguarda i bosoni si ha

$$f(\vec{r}, w) = \frac{sm^3}{h^3} \frac{1}{e^{\frac{-\mu_0 + U(\vec{r}) + \frac{1}{2}mw^2}{KT}} - 1} \quad (45)$$

Con $0 < \alpha \leq 1$ ($-\infty < \mu_0 \leq 0$); il caso limite di degenerazione estrema si ha quando $\alpha \rightarrow 1$ ($\mu_0 \rightarrow 0$).

Per una più chiara comprensione del significato del potenziale chimico μ_0 e di come esso incida sul comportamento di un sistema degenerato, consideriamo separatamente i sistemi di fermioni da quelli di bosoni.

a) Fermioni.

Abbiamo visto che per un sistema di Fermioni μ_0 può essere sia positivo che negativo. In caso sia positivo (effetti quantistici dominanti, o comunque non trascurabili), si può dimostrare che $\mu_0 = E_F = \text{Energia di Fermi}$. Quindi dovremo spendere energia non già per estrarre ma, invece, per introdurre una particella. Infatti, poiché tutti i livelli energetico sono occupati fino al livello E_F , un fermione può entrare solo se ha un'energia $E > E_F$. In conclusione, in questo caso per effetto del principio di esclusione di Pauli il potenziale di Bohm tende a far diminuire il potenziale di coesione del sistema.

Quando invece il potenziale $\mu_0 < 0$ e quindi gli effetti di degenerazione sono molto deboli e possono essere trascurati, il gas si comporta come un gas classico, e quindi dobbiamo spendere energia per estrarre un fermione.

b) Bosoni.

Per un sistema di Bosoni, μ_0 è, come abbiamo già detto, negativo; così che il potenziale di Bohm genera una forza di coesione e quindi è necessario fornire energia per estrarre un bosone.

Tuttavia bisogna tener conto di un caso particolare; infatti, come vedremo più avanti, nel caso di un gas di Bosoni, esiste una temperatura critica, T_c (funzione di $n = \frac{N}{V}$) tale per cui $\alpha = 1$ e quindi $\mu_0 = 0$.

Si ha così che alle temperature $T \leq T_c$ non è richiesta energia per estrarre un bosone dal gas.

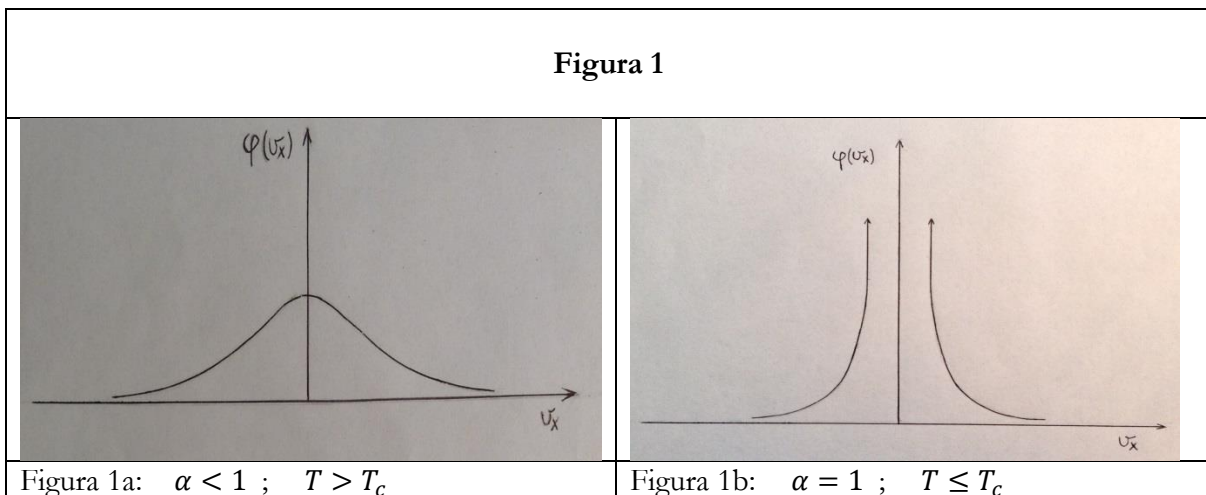
Questo effetto è connesso con il fenomeno della *condensazione di Bose-Einstein*.

Cap. 3 Condensazione di Bose-Einstein

Consideriamo un gas di bosoni, la cui funzione di distribuzione all'equilibrio è data dall'Eq. (44) che qui riportiamo nel caso di potenziale esterno $U(\vec{r}) = 0$ e $\vec{v}_0 = 0$.

$$f(v) = \frac{sm^3}{h^3} \frac{1}{e^{\frac{-\mu_0 + \frac{1}{2}mv^2}{KT}} - 1} = \frac{sm^3}{h^3} \varphi(v) \quad (46)$$

ed il cui andamento è riportato qualitativamente in figg. 1 a) e 1 b).



Le figure a) e b) sono caratterizzate da due valori notevoli dei parametri α (e cioè μ_0) e T , e per il caso monodimensionale.

Nella figura 1a) si ha $\alpha < 1$, e cioè $\mu_0 \neq 0$, e conseguentemente - come vedremo - $T > T_c$ (dove T_c è una temperatura caratteristica che definiremo più avanti temperatura critica). In questo caso la funzione di distribuzione è sempre limitata, come si evince direttamente dalla formula (46).

Nella figura 1b) $\alpha = 1$ (che è il massimo valore che questo parametro può assumere), quindi $\mu_0 = 0$ e $T \leq T_c$. Notiamo che, nella figura 1b), al tendere a zero della velocità, la funzione di distribuzione f tende ad infinito. Questo fatto consentirà un possibile accumulo di bosoni con velocità prossima a zero.

Vogliamo ora ricavare la densità $n = \frac{N}{V}$ che si ottiene integrando la $f(\vec{r}, \vec{v})$ su tutto lo spazio delle velocità.

A tal fine sviluppiamo la funzione di distribuzione in serie di Taylor

$$f(\vec{v}) = \frac{sm^3}{h^3} \frac{1}{\frac{1}{\alpha} e^{\frac{mv^2}{KT}} - 1} = \frac{sm^3}{h^3} \frac{\alpha e^{-\frac{mv^2}{2KT}}}{1 - \alpha e^{-\frac{mv^2}{2KT}}} = \frac{sm^3}{h^3} \alpha e^{-\frac{mv^2}{2KT}} \left(1 + \alpha e^{-\frac{mv^2}{2KT}} + \alpha^2 e^{-\frac{mv^2}{KT}} + \alpha^3 e^{-\frac{3mv^2}{2KT}} + \dots \right) \quad (47)$$

Se ora integriamo lo sviluppo così ottenuto rispetto a \vec{v} otteniamo

$$n = s \left(\frac{mKT}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left[\alpha + \frac{\alpha^2}{2^{\frac{3}{2}}} + \frac{\alpha^3}{3^{\frac{3}{2}}} + \dots \right] = s \left(\frac{mKT}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \zeta_{\frac{3}{2}}(\alpha) \quad (48)$$

dove

$$\zeta_r(\alpha) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j^r} \quad (49)$$

è la serie di Riemann.

Come si vede per l'Eq. (48), i tre parametri n , T , ed α (o μ_0) sono interdipendenti.

Da una semplice discussione del legame fra queste tre grandezze e circa i limiti che esse si impongono a vicenda, emerge direttamente, come vedremo, un fenomeno fisico di grande importanza.

Notiamo innanzitutto che il massimo valore di $\zeta_{\frac{3}{2}}(\alpha)$ si ha per $\alpha = 1$, ed è precisamente $\zeta_{\frac{3}{2}}(1) = 2,612$.

Quindi il rapporto fra n e T non può superare un certo valore, e precisamente

$$\frac{n}{T^{\frac{3}{2}}} \leq s \left(\frac{mK}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} 2,612 \quad (50)$$

Così, se $n = \frac{N}{V}$ è fissato, la temperatura T deve essere maggiore o uguale a una certa temperatura T_c che prende il nome di temperatura critica, data da

$$T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{mK} \left(\frac{n/s}{2,612} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (51)$$

Per inquadrare meglio e comprendere più a fondo il significato di questo legame fra le tre grandezze sopra menzionate, supponiamo di fissare una temperatura $T > T_c$ e di aumentare il numero di Bosoni, N . Dall'Eq. (49) al crescere di N , essendo la temperatura fissata, deve aumentare la fugacità α . Se continuiamo ad aumentare N , α raggiungerà il suo massimo valore, che come ricordiamo è uguale ad 1. Raggiunto questo valore di N , per cui α è uguale a 1, ci si potrebbe aspettare di non poter più aumentare ulteriormente N . Ma, come abbiamo visto, per $\alpha = 1$ la funzione di distribuzione diventa infinita per $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, ed allora le particelle che è possibile aggiungere ulteriormente non potranno che essere ospitate allo stato quantico fondamentale con $\mathbf{v}=\mathbf{0}$.

Questo fenomeno singolare, di accumulo di un numero macroscopicamente grande di particelle in un singolo stato quantico prende il nome di condensazione di Bose-Einstein, perché in un certo senso questo fenomeno richiama il familiare processo della condensazione del vapore nello stato liquido. Questa analogia con la condensazione emerge con particolare evidenza quando si fissasse un valore N e si facesse diminuire la temperatura fino al valore T_c ed oltre.