

# EQUAZIONE DI FOKKER-PLANCK

*D. Giusti<sup>^</sup> – V. G. Molinari\**

<sup>^</sup> ENEA, C.R.E. “E. Clementel”, via Martiri di Monte Sole, 4, Bologna, Italia

\* UNIVERSITA' DI BOLOGNA, Laboratorio di Ingegneria Nucleare di Montecuccolino, via dei Colli, 16 Bologna, Italia

## Prefazione

Agli inizi del 1900 Fokker [1] e Planck [2] hanno ricavato un'equazione, che prende il nome di “equazione di Fokker-Planck”, con lo scopo di descrivere il moto browniano di particelle.

In seguito questa equazione è stata applicata per analizzare e risolvere problemi in vari campi appartenenti a diverse discipline come la fisica, la chimica e l'ingegneria elettrica.

I sistemi dinamici di particelle che possono essere descritti correttamente dall'equazione di Fokker-Planck devono avere un peculiare comportamento: la traiettoria delle singole particelle deve essere simile a quella delle particelle del moto browniano, cioè fatta di deboli deflessioni a cui corrispondono deboli variazioni di velocità e solo raramente deflessioni con grandi angoli e forti variazioni di velocità. Questo dipende soprattutto dal tipo di interazioni che sussiste fra le particelle del sistema, dalla loro densità in rapporto al range di azione delle forze di interazione, o dal rapporto delle masse delle particelle del sistema fisico.

Una tale situazione può accadere, come abbiamo detto, in molti campi, come per esempio in fisica del plasma, in fisica dello stato solido, in ottica quantistica, in biologia o in teoria dei circuiti.

Scopo di questo rapporto scientifico è ricavare, nell'ambito della teoria cinetica, l'equazione di Fokker-Planck; più precisamente, partendo dalla “equazione master” o dall'equazione di Boltzmann ed eseguendo opportune approssimazioni, si otterrà un termine di collisione dell'equazione cinetica detto appunto termine di collisione di Fokker-Planck. In particolare, come applicazione, si otterranno le espressioni dei coefficienti di Fokker-Planck per gli elettroni di un plasma e per macroparticelle che diffondono in sistemi di molecole di massa molto più piccola.

Verrà anche ricavato un termine di collisione del tipo Fokker-Planck per particelle test che, in seguito agli urti, subiscono deboli variazioni di energia, ma non di velocità.

Nell'ultimo capitolo si introdurranno le correzioni da apportare al termine di collisione di Fokker-Planck per tener conto degli effetti quantistici.

[1] A.D. Fokker; Ann.Physik, **43**, 810 (1914)

[2] M.Planck; Sitzber. Preuß. Akad. Wiss. p.324 (1917)

## 1. Introduzione

La teoria cinetica, o teoria del trasporto, intesa nella sua accezione più ampia, è una teoria microscopica che descrive i processi che avvengono in sistemi costituiti da molte “particelle” (atomi, molecole, elettroni, fotoni ecc.) sia in stato di equilibrio, sia in stato di non-equilibrio.

Caratteristica fondamentale di questa teoria è che i processi di trasporto, tipici dello stato di non-equilibrio, o le proprietà del sistema in stato di equilibrio sono ricavati facendo diretto riferimento al tipo di interazione che sussiste fra le particelle del sistema stesso.

Un particolare tipo di problema che può essere efficacemente studiato nell’ambito della teoria cinetica è quello della diffusione di particelle, che chiameremo particelle test, che avviene all’interno di un sistema di altre particelle, che chiameremo particelle field.

In generale le particelle test hanno una densità molto minore di quella delle particelle field in modo tale che le interazioni fra le particelle test possano essere trascurate. Quindi le particelle test urtano solo contro le particelle field del sistema; queste ultime poi possono essere in stato di equilibrio o di non-equilibrio, ma, in prima approssimazione, la presenza delle particelle test non ne altera lo stato.

In questo rapporto scientifico vogliamo ricavare una particolare equazione cinetica, l’equazione di Fokker-Planck, particolarmente adatta per studiare, sotto particolari condizioni, quest’ultimo problema, cioè il problema della diffusione di particelle test.

Considereremo come particelle test sia particelle elettricamente cariche, sia particelle neutre, aventi massa che può essere molto minore o molto maggiore di quella delle particelle field.

Va sottolineato che se il sistema è composto da più specie di particelle, le particelle test possono essere una di queste specie. Per esempio, se stiamo considerando un plasma composto da elettroni, ioni e atomi neutri, le particelle test potrebbero essere gli elettroni. In questo caso l’equazione di Fokker-Planck servirà per capire il comportamento dinamico del plasma stesso.

Per introdurci meglio nel problema e per chiarire quali sono le condizioni fisiche che consentono di introdurre le approssimazioni necessarie per rendere valida l’equazione di Fokker-Planck, partiamo da alcuni casi particolari.

In molti sistemi dinamici le forze d’interazione fra le particelle costituenti il sistema decrescono lentamente con la distanza. Basti pensare, per esempio, alle interazioni fra particelle elettricamente cariche, o fra corpi celesti che sono governate da forze proporzionali all’inverso del quadrato della distanza. Una particella di questi sistemi (particella test) spesso interagisce simultaneamente con molte altre particelle del sistema (particelle field) così che gli urti distanti con piccoli angoli di deflessione sono molto più frequenti e importanti degli urti vicini con grandi angoli di deflessione.

La somma delle forze di interazione che agiscono sulla particella test sarà, in generale, piccola perché queste forze provengono da tutte le direzioni e sono quindi antagoniste.

Questo permette di semplificare il termine di collisione dell’equazione cinetica che, con queste semplificazioni, prende il nome di “termine di collisione di Fokker-Planck”. A tal fine, e per fissare meglio le idee, ci riferiamo in modo specifico a un sistema costituito da particelle cariche (per esempio gli elettroni di un plasma completamente ionizzato); consideriamo pertanto le tre lunghezze caratteristiche:

$p_c =$  parametro d’urto per una deflessione di  $90^\circ$   $\left( \chi = \frac{\pi}{2} \right)$  nel Sistema C.M.

$d = n^{-\frac{1}{3}}$  = distanza media fra le particelle

$\lambda_D =$  raggio di Debye

$\lambda_D$  tiene conto dello schermaggio Coulombiano e rappresenta la distanza limite fra due particelle oltre la quale l'interazione Coulombiana su base individuale può essere trascurata per l'effetto di schermaggio elettrostatico prodotto dalle altre particelle cariche. In altre parole, una particella carica interagisce singolarmente, anche se simultaneamente, con effetti non trascurabili sulla sua traiettoria, solo con le particelle la cui distanza da essa è  $\leq \lambda_D$ . Le particelle situate fuori dalla sfera di raggio uguale a  $\lambda_D$  (detta sfera di Debye), avente il centro coincidente con la particella "test" considerata, non urtano singolarmente con la particella test, ma possono interagire con essa solo attraverso collisioni collettive od organizzate (onde).

Abbiamo visto che questi moti collettivi danno origine al "campo di carica spaziale" e sono perciò i responsabili delle interazioni fra le particelle come descritto nell'equazione di Vlasov. Ricordiamo

che  $p_c = \frac{q_A q_B}{4\pi\epsilon_0 m' g^2}$  dove  $q_A$  e  $q_B$  sono le cariche delle due particelle interagenti la cui massa ridotta è  $m'$  e  $g$  è il modulo della loro velocità relativa.

Per concretizzare un po' meglio quanto abbiamo detto, suddividiamo i vari tipi di urti e deflessioni che possono accadere confrontando il parametro d'urto  $p$  con le tre lunghezze caratteristiche sopra definite. Questa suddivisione ci aiuterà a far mente locale ai casi a cui sono applicabili le condizioni che seguono, con il vantaggio di poter inquadrare con maggior chiarezza i risultati e, al contempo, i limiti degli sviluppi proposti.

Si possono verificare le seguenti relazioni:

- 1)  $0 \leq p \leq \text{alcuni } p_c \Rightarrow$  urti binari con grandi angoli di deflessione
- 2)  $\text{alcuni } p_c \leq p \leq d \Rightarrow$  principalmente urti binari con piccoli angoli di deflessione
- 3)  $d \leq p \leq \lambda_D \Rightarrow$  interazioni multiple simultanee con piccoli angoli di deflessione

Se le situazioni descritte dai punti 2) e 3) sono molto più frequenti di quella del punto 1), la particella test compirà molte piccole deflessioni, a cui corrispondono deboli variazioni di velocità, descrivendo una traiettoria con piccoli angoli e solo raramente avverranno deflessioni con grandi angoli ( $\geq 90^\circ$ ).

Come si vedrà in seguito, non solo quando l'interazione è di tipo Coulombiano, ma anche per altri tipi di interazione si potrà usare l'equazione di Fokker-Planck.

## 2. Termine di collisione di Fokker-Planck

Le tre ipotesi fondamentali che sono alla base della determinazione del termine di collisione di Fokker-Planck sono:

- 1) che il processo sia Markoviano\*
- 2) che gli urti siano elastici
- 3) che gli urti del 2°) e 3°) tipo del paragrafo precedente siano preponderanti.

*\*Nell'ambito della teoria della probabilità, un processo scotastico è detto essere un "processo Markoviano" se l'evoluzione di tale processo avviene in modo che ciò che accadrà nel futuro dipende solo dal presente, ma non dagli stati passati del sistema. Più precisamente, consideriamo il susseguirsi di tre eventi a, b, c; la probabilità della successione di questi eventi può essere espressa in termini della probabilità del verificarsi dell'evento a e della probabilità*

di transizione  $a \rightarrow b$ ,  $b \rightarrow c$ . Se ciascuna delle probabilità di transizione dipende solo dai due stati che sono interessati dalla transizione, ma non dalla storia precedente, una tale successione di eventi è detta costituire un processo (o una catena) di Markov.

Per concentrarci sulla dinamica degli urti, supponiamo che le particelle di un sistema omogeneo e privo di forze esterne percorrano un cammino (una traiettoria) “casuale”, simile al moto Browniano, come risultato di un gran numero di piccole deflessioni. Un tale processo può essere considerato “stocastico” ed essere descritto ricorrendo alla funzione *probabilità di transizione*,  $P(\vec{v}, \Delta\vec{v})$ . Una tale funzione viene definita come la probabilità che, nell’intervallo di tempo  $\Delta t$ , una particella con velocità  $\vec{v}$  subisca una variazione di velocità pari a  $\Delta\vec{v}$ .

Supponiamo che la funzione probabilità  $P(\vec{v}, \Delta\vec{v})$  non dipenda esplicitamente dal tempo; in altre parole supponiamo che il sistema dinamico si evolva indipendentemente dalla sua storia, indipendentemente cioè dai valori che la funzione di distribuzione delle particelle ha assunto precedentemente. Questo vuol dire che le leggi della dinamica degli urti per il sistema che stiamo considerando non cambiano col tempo. Il cammino casuale delle particelle del sistema costituisce quindi un processo Markoviano.

La funzione di distribuzione delle particelle test al tempo  $t$ ,  $f(\vec{v}, t)$  può essere ottenuta dalla seguente equazione (equazione Master)

$$f(\vec{v}, t) = \int f(\vec{v} - \Delta\vec{v}, t - \Delta t) P(\vec{v} - \Delta\vec{v}, \Delta\vec{v}) d(\Delta\vec{v}) \quad (1)$$

che permette di ricavare la funzione di distribuzione al tempo  $t$  conoscendo il valore che essa aveva ai tempi precedenti.

Se ora sviluppiamo in serie di Taylor la funzione integranda che compare nell’Eq.(1) e tronchiamo lo sviluppo per le ipotesi fatte, dopo i primi termini, otteniamo

$$f(\vec{v}, t) = \int d(\Delta\vec{v}) \left\{ f(\vec{v}, t) P(\vec{v}, \Delta\vec{v}) - \Delta t P \frac{\partial f}{\partial t} - \Delta\vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} (fP) + \frac{1}{2} \Delta\vec{v} \Delta\vec{v} : \frac{\partial^2}{\partial \vec{v} \partial \vec{v}} (fP) \right\} \quad (2)$$

Ricordiamo che, per definizione di funzione di probabilità, deve essere

$$\int P(\vec{v}, \Delta\vec{v}) d(\Delta\vec{v}) = 1 \quad (3)$$

Inoltre, ricordando che le variazioni di  $f$ , per le ipotesi fatte di omogeneità del sistema e di assenza di forze esterne, sono dovute solo agli effetti degli urti, possiamo identificare il termine di collisione con la seguente espressione

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} = \frac{[f(\vec{v}, t) - f(\vec{v}, t - \Delta t)]}{\Delta t} \quad (4)$$

sottintendendo il passaggio al limite per  $\Delta t \rightarrow 0$ . Dalle Eq.(2) ,(3) e (4), si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \int \frac{1}{\Delta t} \left\{ -\Delta \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} (fP) + \frac{1}{2} \Delta \vec{v} \Delta \vec{v} : \frac{\partial^2}{\partial \vec{v} \partial \vec{v}} (fP) \right\} d(\Delta \vec{v}) = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} \quad (5)$$

Se indichiamo con

$$\langle \Delta \vec{v} \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int P(\vec{v}, \Delta \vec{v}) \Delta \vec{v} d(\Delta \vec{v}) \quad (6a)$$

e

$$\langle \Delta \vec{v} \Delta \vec{v} \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int P(\vec{v}, \Delta \vec{v}) \Delta \vec{v} \Delta \vec{v} d(\Delta \vec{v}) \quad (6b)$$

il termine di collisione definito dall' Eq.(5), si può scrivere come

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} = -\frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot (f \langle \Delta \vec{v} \rangle) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \vec{v} \partial \vec{v}} : (f \langle \Delta \vec{v} \Delta \vec{v} \rangle) \quad (7)$$

che prende il nome di *termine di collisione di Fokker-Planck*.

Va notato che, con questo sviluppo, l'equazione cinetica da integro-differenziale diventa differenziale.

I coefficienti  $\langle \Delta \vec{v} \rangle$  e  $\langle \Delta \vec{v} \Delta \vec{v} \rangle$  prendono il nome di coefficienti di Fokker-Planck rispettivamente di *frizione dinamica* e di *diffusione nello spazio delle velocità* ed esprimono una media delle variazioni  $\Delta \vec{v}$  e  $\Delta \vec{v} \Delta \vec{v}$  come risultato di molte deboli interazioni.

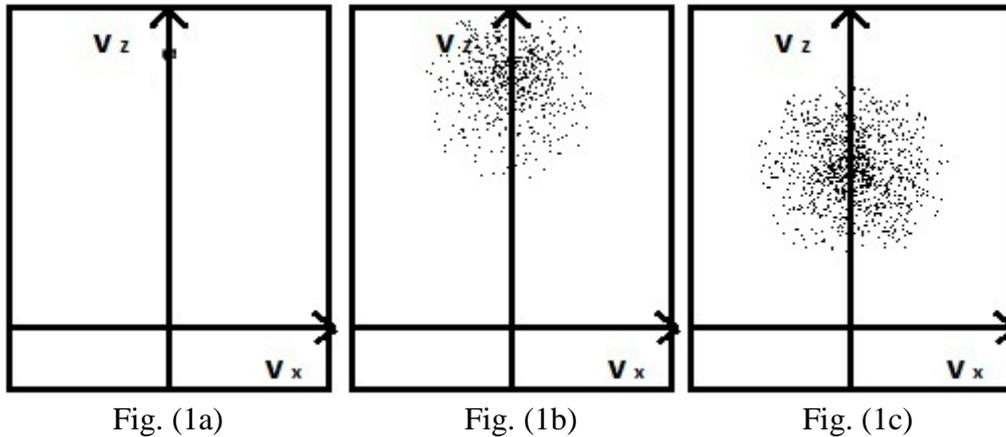
Per meglio comprendere il significato fisico di questi coefficienti, consideriamo il seguente esempio.

Supponiamo che un fascio di particelle test aventi tutte la stessa velocità  $v_{0z}$  diffondano nello spazio delle velocità che, per semplicità di rappresentazione, considereremo di due dimensioni,  $v_x, v_z$ , urtando contro particelle field in equilibrio con una certa distribuzione (per esempio una distribuzione maxwelliana) con le sole due componenti  $v_x, v_z$ . La Fig.(1a) rappresenta la situazione al tempo  $t = 0$ . Tutte le particelle test sono rappresentate da un unico punto di coordinate  $v_x = 0$  e  $v_z = v_{0z}$ .

Col passare del tempo, le particelle test urteranno contro le particelle field e questi urti faranno variare sia la componente  $v_x$  che  $v_z$  delle particelle test; la Fig.(1b) rappresenta questa situazione dopo che le particelle test hanno subito un certo numero N di urti. I punti rappresentativi delle velocità formano ora una piccola nube di punti simmetrici (essendo le particelle field uniformi) rispetto al baricentro di coordinate  $v'_x = 0$  e  $v'_z < v_{0z}$ . La Fig.(1c) rappresenta la situazione dopo

che sono avvenuti un numero di urti molto maggiore di  $N$ ; la componente  $v_z'$  è ancora diminuita mentre il raggio della nube è ulteriormente aumentato.

Il coefficiente di frizione dinamica tiene conto della diminuzione della velocità  $v_z'$  del baricentro in quanto il fascio iniziale viene frenato dagli urti, mentre il coefficiente di diffusione tiene conto dell'allargamento della nube cioè della diffusione a macchia dei punti rappresentativi della velocità.



### 3. Derivazione dell'equazione di Fokker-Planck dall'equazione di Boltzmann

#### (Equazione di Landau)

Per poter usare il termine di collisione di Fokker-Planck è necessario conoscere i coefficienti definiti dalle Eq.(6) che dipendono dalla funzione probabilità di transizione  $P(\vec{v}, \Delta\vec{v})$ .

La valutazione di questa funzione è molto complessa e questo richiede l'introduzione di appropriate approssimazioni.

In alcuni casi è possibile ricorrere all'integrale di collisione di Boltzmann e quindi anche verificare quale relazione esiste fra l'integrale di collisione di Boltzmann e il termine di collisione di Fokker-Planck. Questo si verifica quando gli urti del tipo 2) del paragrafo precedente sono quelli di maggiore importanza per l'evoluzione della funzione  $f$ .

Sotto queste condizioni, questa stessa situazione si può verificare se le interazioni simultanee possono essere considerate una successione di collisioni binarie con grande parametro d'urto e quindi con piccoli angoli di deflessione.

Partiamo, perciò, dall'integrale di collisione di Boltzmann

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} = \int (f' f'_B - f f_B) g S(\chi) d\omega d\vec{v}_B \quad (8)$$

e dimostriamo la seguente importante proprietà

$$\int A(\vec{v}) \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} d\vec{v} = \int (A' - A) f f_B g S(\chi) d\omega d\vec{v}_B d\vec{v} \quad (9)$$

dove  $A(\vec{v})$  è una arbitraria funzione della velocità  $[A' \equiv A(\vec{v}')] .$

Moltiplichiamo l'Eq.(8) per  $A(\vec{v})$  e integriamo rispetto a  $\vec{v}$

$$\begin{aligned} \int A(\vec{v}) \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} d\vec{v} &= \int A(\vec{v}) (f' f'_B - f f_B) g S(\chi) d\omega d\vec{v}_B d\vec{v} = \\ &= \int A(\vec{v}) (f' f'_B) g S(\chi) d\omega d\vec{v}_B d\vec{v} - \int A(\vec{v}) (f f_B) g S(\chi) d\omega d\vec{v}_B d\vec{v} \end{aligned} \quad (10)$$

Se eseguiamo un cambiamento di variabili e ricordiamo che dalla dinamica degli urti binari  $g = g'$  e  $d\vec{v} d\vec{v}_B = d\vec{v}' d\vec{v}'_B$ , si avrà

$$\int A(\vec{v}) (f' f'_B) g S(\chi) d\omega d\vec{v}_B d\vec{v} = \int A(\vec{v}') (f f_B) g S(\chi) d\omega d\vec{v}_B d\vec{v} \quad (11)$$

Sostituendo la parte destra dell'Eq.(11) nell'Eq.(10) si ottiene

$$\begin{aligned} \int A(\vec{v}) \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} d\vec{v} &= \int A(\vec{v}') (f f_B) g S(\chi) d\omega d\vec{v}_B d\vec{v} - \int A(\vec{v}) (f f_B) g S(\chi) d\omega d\vec{v}_B d\vec{v} = \\ &= \int (A' - A) f f_B g S(\chi) d\omega d\vec{v}_B d\vec{v} \end{aligned} \quad (12)$$

espressione che verifica la proprietà dell'integrale di collisione di Boltzmann.

In conformità alle ipotesi fatte, le collisioni binarie producono piccoli cambiamenti della velocità,  $\Delta\vec{v}$ , e quindi la funzione arbitraria  $A(\vec{v}') = A(\vec{v} + \Delta\vec{v})$  può essere sviluppata in serie di Taylor troncando lo sviluppo dopo i primi termini

$$A(\vec{v} + \Delta\vec{v}) = A(\vec{v}) + \Delta\vec{v} \cdot \frac{\partial A(\vec{v})}{\partial \vec{v}} + \frac{1}{2} \Delta\vec{v} \Delta\vec{v} : \frac{\partial^2 A(\vec{v})}{\partial \vec{v} \partial \vec{v}} \quad (13)$$

Sostituendo questo sviluppo nell'Eq.(12) si ottiene

$$\int A(\vec{v}) \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} d\vec{v} = \int \left[ \Delta\vec{v} \cdot \frac{\partial A(\vec{v})}{\partial \vec{v}} + \frac{1}{2} \Delta\vec{v} \Delta\vec{v} : \frac{\partial^2 A(\vec{v})}{\partial \vec{v} \partial \vec{v}} \right] f f_B g S(\chi) d\omega d\vec{v}_B d\vec{v} \quad (14)$$

Consideriamo separatamente i due integrali della parte destra della (14). Integrando per parti il primo integrale e ricordando che  $f(\pm\infty) = 0$  si ottiene

$$\begin{aligned} \int \Delta\vec{v} \cdot \frac{\partial A(\vec{v})}{\partial \vec{v}} f f_B g S(\chi) d\omega d\vec{v}_B d\vec{v} &= \int \left[ f_B S(\chi) \int \Delta\vec{v} \cdot \frac{\partial A(\vec{v})}{\partial \vec{v}} f g d\vec{v} \right] d\omega d\vec{v}_B = \\ &= - \int A(\vec{v}) \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot (\Delta\vec{v} f g) f_B S(\chi) d\omega d\vec{v}_B d\vec{v} \end{aligned} \quad (15)$$

Integrando due volte per parti il secondo integrale si ha

$$\int \left[ \frac{1}{2} \Delta\vec{v} \Delta\vec{v} : \frac{\partial^2 A(\vec{v})}{\partial \vec{v} \partial \vec{v}} \right] \cdot f f_B g S(\chi) d\omega d\vec{v}_B d\vec{v} = \int \frac{1}{2} A(\vec{v}) \frac{\partial^2}{\partial \vec{v} \partial \vec{v}} : (\Delta\vec{v} \Delta\vec{v} f g) f_B S(\chi) d\omega d\vec{v}_B d\vec{v} \quad (16)$$

In conclusione si ottiene

$$\begin{aligned} \int A(\vec{v}) \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} d\vec{v} &= - \int A(\vec{v}) \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot (\Delta\vec{v} f g) f_B S(\chi) d\omega d\vec{v}_B d\vec{v} + \\ &+ \int \frac{1}{2} A(\vec{v}) \frac{\partial^2}{\partial \vec{v} \partial \vec{v}} : (\Delta\vec{v} \Delta\vec{v} f g) f_B S(\chi) d\omega d\vec{v}_B d\vec{v} \end{aligned} \quad (17)$$

Definiamo ora le quantità

$$\langle \Delta\vec{v} \rangle = \int \Delta\vec{v} g S(\chi) f_B d\omega d\vec{v}_B \quad (18a)$$

$$\langle \Delta\vec{v} \Delta\vec{v} \rangle = \int \Delta\vec{v} \Delta\vec{v} g S(\chi) f_B d\omega d\vec{v}_B \quad (18b)$$

che sono medie modificate del cambiamento di velocità delle particelle, “pesate” sulla funzione di distribuzione della velocità  $f_B$  e sulla funzione di distribuzione angolare  $S(\chi)$ .

L'Eq.(17) diviene

$$\int A(\vec{v}) \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} d\vec{v} = \int A(\vec{v}) \left[ -\frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot (f \langle \Delta \vec{v} \rangle) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \vec{v} \partial \vec{v}} : (f \langle \Delta \vec{v} \Delta \vec{v} \rangle) \right] d\vec{v} \quad (19)$$

L'Eq.(19) deve essere verificata qualsiasi sia la funzione  $A(\vec{v})$ ; perciò, deve valere l'uguaglianza

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} = -\frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot (f \langle \Delta \vec{v} \rangle) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \vec{v} \partial \vec{v}} : (f \langle \Delta \vec{v} \Delta \vec{v} \rangle) \quad (20)$$

che coincide con l'Eq.(7).

L'Eq.(20) con i coefficienti definiti dalle Eq.(18) è stata ricavata per la prima volta da Landau. In tal modo le Eq.(18) definiscono il coefficiente di frizione dinamica e il tensore di diffusione in termini della funzione di distribuzione angolare  $S(\chi)$ , cioè in termini di proprietà degli urti binari. Il calcolo dei coefficienti di Fokker-Planck è così ricondotto al calcolo delle sezioni d'urto differenziali che sono parametri basilari nella teoria del trasporto.

Vedremo infatti nel prossimo paragrafo come questi coefficienti possano essere ricavati per alcune situazioni fisiche di notevole interesse.

E' importante osservare che il termine di collisione dell'equazione cinetica si deve annullare se la funzione di distribuzione è la distribuzione di equilibrio (nell'ambito della fisica classica la distribuzione Maxwelliana) come infatti accade per il termine di collisione di Boltzmann, Eq.(8). Per ricavare il termine di collisione di Fokker-Planck, Eq.(20), abbiamo approssimato il termine di collisione di Boltzmann in quanto abbiamo troncato lo sviluppo di Taylor dopo i primi termini della serie e quindi dobbiamo aspettarci che, se poniamo  $f$  uguale alla maxwelliana,  $f_M$ , nell'Eq.(20), il termine di collisione di Fokker-Planck non si annulli.

Se poniamo

$$\left( \frac{\partial f_M}{\partial t} \right)_{coll} = \psi(v)$$

dall'analisi della funzione  $\psi(v)$  possiamo verificare se le approssimazioni fatte sono accettabili per il problema fisico che stiamo considerando.

#### 4. Coefficienti di Fokker-Planck per elettroni di un plasma

Come caso importante per alcune applicazioni di fisica del plasma, calcoliamo i coefficienti di Fokker-Planck per elettroni di un plasma completamente ionizzato, tenendo conto solo degli urti degli elettroni contro gli ioni, cioè trascurando gli urti elettrone-elettrone.

Dalle Eq.(18) si ha

$$\langle \Delta \vec{v} \rangle = \int \{ \Delta \vec{v} \} f_B d\vec{v}_B \quad (21a)$$

$$\langle \Delta \vec{v} \Delta \vec{v} \rangle = \int \{ \Delta \vec{v} \Delta \vec{v} \} f_B d\vec{v}_B \quad (21b)$$

con

$$\{ \Delta \vec{v} \} = \int \Delta \vec{v} g S(\chi) d\omega \quad (22a)$$

$$\{ \Delta \vec{v} \Delta \vec{v} \} = \int \Delta \vec{v} \Delta \vec{v} g S(\chi) d\omega \quad (22b)$$

Ricordiamo che, dallo studio della dinamica degli urti binari, si è ottenuto

$$\Delta \vec{v} = \frac{m_i}{m_i + m} (\vec{g} - \vec{g}') \quad (23)$$

dove  $m_i$  e  $m$  sono la massa degli ioni e degli elettroni rispettivamente e  $\vec{g}$  e  $\vec{g}'$  sono le velocità relative delle particelle interagenti prima e dopo l'urto.

Dall'Eq.(23) si ottiene, per le tre componenti di  $\Delta \vec{v}$

$$\Delta v_x = \frac{m_i}{m_i + m} g \text{sen} \chi \cos \varphi \quad (24a)$$

$$\Delta v_y = \frac{m_i}{m_i + m} g \text{sen} \chi \text{sen} \varphi \quad (24b)$$

$$\Delta v_z = \frac{m_i}{m_i + m} g (1 - \cos \chi) \quad (24c)$$

se ci riferiamo a un sistema cartesiano ortogonale con l'asse delle  $z$  orientato secondo la direzione di  $\vec{g}$ .

Introduciamo ora nelle Eq.(22) le Eq.(24) e la funzione di distribuzione angolare per interazioni Coulombiane

$$S(\chi) = \frac{p_c^2}{(1 - \cos \chi)^2} \quad (25)$$

Dall'integrazione rispetto a  $\varphi$  si ha  $\{\Delta v_x\} = \{\Delta v_y\} = 0$  ,  $\{\Delta v_i \Delta v_j\} = 0$  per  $i \neq j$  e

$$\{\Delta v_z\} = 2\pi M p_c^2 g^2 \int_0^\pi \frac{\text{sen} \chi}{1 - \cos \chi} d\chi \quad (26)$$

dove  $M = m_i / (m_i + m)$  .

L'integrale dell'Eq.(26) diverge, come ci si deve aspettare in quanto l'interazione Coulombiana fra due particelle cariche avviene anche con parametro d'urto infinito a cui corrisponde un angolo di diffusione  $\chi = 0$  . Tuttavia, poiché le particelle separate da una distanza maggiore del raggio di Debye,  $\lambda_D$  , non interagiscono singolarmente per effetto dello schermaggio prodotto dalle altre particelle cariche, possiamo sostituire lo zero del limite inferiore dell'integrazione rispetto a  $\chi$  con l'angolo di diffusione corrispondente al parametro d'urto uguale a  $\lambda_D$  .

Per questo, eseguiamo il cambiamento di variabile  $u = p/p_c$  e, ricordando che nello studio della dinamica degli urti binari si è ottenuto

$$u = \frac{p}{p_c} = \cot \frac{\chi}{2} \quad (27)$$

si ha  $du = -\frac{d\chi}{1 - \cos \chi}$  e quindi  $\text{sen} \chi = \frac{2u}{1 + u^2}$

Se ora introduciamo il "logaritmo Coulombiano"  $\Lambda = \lambda_D / p_c$  possiamo scrivere

$$\{\Delta v_z\} = 2\pi M g^2 p_c^2 \int_{\Lambda}^0 \frac{2u}{1 + u^2} du = 2\pi M g^2 p_c^2 \ln(1 + \Lambda^2) \quad (28)$$

Per urti elettroni contro ioni si verifica che  $\Lambda \gg 1$  e perciò possiamo approssimare  $\ln(1 + \Lambda^2) \approx 2 \ln \Lambda$  .

Se teniamo conto di questa approssimazione e sostituiamo l'espressione di  $p_c$  (Cap.1), otteniamo

$$\{\Delta v_z\} = \frac{M\Theta}{g^2} \quad (29)$$

con  $\Theta = \frac{Z^2 e^4 \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 m'^2}$  essendo  $m'$  la massa ridotta.

Seguendo lo stesso procedimento, possiamo ricavare  $\{(\Delta v_z)^2\}$  ,  $\{(\Delta v_x)^2\}$  e  $\{(\Delta v_y)^2\}$ . Si ottiene

$$\begin{aligned} \{(\Delta v_z)^2\} &= 2\pi M^2 g^3 p_c^2 \int_{\chi_{\min}}^{\pi} \text{sen}\chi d\chi = -2\pi M^2 g^3 p_c^2 \int_{\Lambda}^0 \frac{4u}{(1+u^2)^2} du = \\ &= 4\pi M^2 g^3 p_c^2 \frac{\Lambda^2}{1+\Lambda^2} \end{aligned} \quad (30)$$

che, per grandi valori di  $\Lambda$  , può essere approssimata come

$$\{(\Delta v_z)^2\} = 4\pi M^2 g^3 p_c^2 = \frac{M^2 \Theta}{g \ln \Lambda} \quad (31)$$

Per i rimanenti due coefficienti si ottiene

$$\begin{aligned} \{(\Delta v_x)^2\} &= \{(\Delta v_y)^2\} = 4\pi M^2 g^3 p_c^2 \int_0^{\Lambda} \frac{u^3}{(1+u^2)^2} du = \\ &= 2\pi M^2 g^3 p_c^2 \left[ \ln(1+\Lambda^2) - \frac{\Lambda^2}{1+\Lambda^2} \right] \approx \frac{M^2 \Theta}{g} \end{aligned} \quad (32)$$

Infine, per calcolare i coefficienti di Fokker-Planck dobbiamo inserire le Eq.(29), (31) e (32) nelle Eq.(18) che definiscono i coefficienti stessi e quindi integrare rispetto alla velocità  $\vec{v}_B$  dopo aver introdotto la funzione di distribuzione delle particelle field. Se però teniamo conto della grande differenza di massa fra elettroni e ioni, possiamo considerare gli ioni fermi e liberi e quindi porre

$$f_i(\vec{v}_i) = n_i \delta(\vec{v}_i) \quad (33)$$

dove  $\delta(x)$  è la funzione di Dirac. Questa approssimazione semplifica notevolmente i calcoli; osservando che, per  $\vec{v}_i = 0$  , si ha  $g = v$  otteniamo

$$\langle \Delta v_z \rangle = \frac{n_i M \Theta}{v^2} \quad ; \quad \langle (\Delta v_x)^2 \rangle = \langle (\Delta v_y)^2 \rangle = \frac{n_i M^2 \Theta}{v} \quad ; \quad \langle (\Delta v_z)^2 \rangle = \frac{n_i M^2 \Theta}{v \ln \Lambda} \quad (34)$$

con  $M \approx 1$ .

## 5. Coefficienti di Fokker-Planck per urti del tipo “sfere rigide”

Consideriamo il caso di particelle test, che indicheremo come particelle  $A$ , che diffondono in un gas di particelle field, che indicheremo come particelle  $B$ , con interazioni del tipo *sfere rigide*. Supponiamo inoltre che la densità  $n_A$  delle particelle test sia molto inferiore a quella,  $n_B$ , delle particelle field, così che si possano trascurare gli urti fra particelle test. Se le particelle test hanno una massa  $m_A$  maggiore della massa  $m_B$  delle particelle field, le variazioni di velocità  $\Delta \vec{v}_A$  in seguito agli urti saranno piccole; questa affermazione, che è tanto più vera quanto più  $m_A$  è maggiore di  $m_B$ , è facilmente verificabile osservando che le variazioni di velocità date dall'Eq.(24) sono proporzionali a  $M = m_B / (m_B + m_A)$  che diminuisce al diminuire del rapporto  $m_B / m_A$ .

Si può quindi utilizzare, in questo caso, l'equazione di Fokker-Planck.

Calcoliamo quindi i coefficienti di Fokker-Planck per interazione del tipo sfere rigide.

Ricordiamo che nello studio della dinamica degli urti binari avevamo trovato che la funzione di distribuzione angolare  $S(\chi)$ , per questo tipo di urti, è isotropa nel sistema di riferimento del centro di massa. Si ha infatti  $S(\chi) = D^2/4$ .

Le variazioni di velocità mediate sulla funzione  $S(\chi)$ , definite dalle Eq.(22), sono date pertanto dalle seguenti espressioni

$$\{\Delta v_x\} = \{\Delta v_y\} = 0 \quad (35a)$$

$$\{\Delta v_z\} = \frac{\pi}{2} MD^2 g^2 \int_0^\pi (1 - \cos \chi) \sin \chi d\chi = \pi MD^2 g^2 \quad (35b)$$

se ci riferiamo a un sistema cartesiano ortogonale con l'asse delle  $z$  orientato secondo la direzione di  $\vec{g}$ . Abbiamo anche

$$\{\Delta v_i \Delta v_j\} = 0 \quad \text{per } i \neq j \quad (36a)$$

$$\{(\Delta v_x)^2\} = \{(\Delta v_y)^2\} = M^2 g^3 \frac{D^2}{4} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^3 \chi \cos^2 \varphi d\chi d\varphi = \frac{\pi}{3} M^2 D^2 g^3 \quad (36b)$$

$$\{(\Delta v_z)^2\} = M^2 g^3 \frac{D^2}{4} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos \chi)^2 \sin \chi d\chi d\varphi = \frac{4\pi}{3} M^2 D^2 g^3 \quad (36c)$$

Per ricavare i coefficienti di Fokker-Planck, dobbiamo inserire le espressioni delle Eq.(35) e (36) nelle Eq.(21) e definire la funzione di distribuzione  $f_B$  delle particelle field. Assumiamo che  $f_B$  sia la distribuzione Maxwelliana,

$$f_B(v_B)d\vec{v}_B = n_B \left( \frac{m_B}{2\pi KT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_B v_B^2}{2KT}} d\vec{v}_B \quad (37)$$

Per i coefficienti di frizione dinamica e di diffusione, otteniamo (vedi Appendice A)

$$\langle \Delta v_z \rangle = n_B \pi M D^2 \left( v_A^2 + \frac{3KT}{m_B} \right) \cong n_B \pi M D^2 \frac{3KT}{m_B} \quad (38a)$$

$$\langle (\Delta v_z)^2 \rangle = n_B \frac{4}{3} \pi M^2 D^2 v_A^3 \left[ 1 + \frac{6KT}{m_B v_A^2} + \frac{3(KT)^2}{m_B^2 v_A^4} \right] \cong n_B \frac{4}{3} \pi M^2 D^2 \frac{3(KT)^2}{v_A m_B^2} \quad (38b)$$

$$\langle (\Delta v_x)^2 \rangle = \langle (\Delta v_y)^2 \rangle = n_B \frac{\pi}{3} M^2 D^2 v_A^3 \left[ 1 + \frac{6KT}{m_B v_A^2} + \frac{3(KT)^2}{m_B^2 v_A^4} \right] \cong n_B \frac{\pi}{3} M^2 D^2 \frac{3(KT)^2}{v_A m_B^2} \quad (38c)$$

Si trova così che il coefficiente di *frizione dinamica* è, con buona approssimazione, costante, mentre i coefficienti di *diffusione* sono inversamente proporzionali alla velocità; quindi, più le particelle test sono veloci, e meno si sparpagliano nelle particelle field. Come applicazione dell'equazione di Fokker-Planck si possono considerare macroparticelle neutre di impurità prive di carica che diffondono nell'aria.

## 6. Termine di collisione di Fokker-Planck per urti con debole variazione di energia

Consideriamo un sistema dinamico costituito da particelle field di massa  $m_B$  molto maggiore di quella  $m_A$  delle particelle test. Come esempio possiamo riferirci a neutroni che collidono con nuclei pesanti o micromolecole che diffondono in un sistema di macromolecole.

Per quanto sorprendente possa risultare, quando  $m_A/m_B \ll 1$ , il sistema può ancora essere analizzato facendo ricorso ad un termine di collisione del tipo Fokker-Planck. Infatti, in un urto fra una particella  $A$  e una particella  $B$  di massa molto maggiore, è la variazione di energia della particella  $A$  ad essere molto piccola rispetto all'energia che aveva prima dell'urto. Per avvalorare

questa affermazione, ricordiamo che, dalla dinamica degli urti binari, il rapporto fra la variazione d'energia  $\Delta E$  e l'energia prima dell'urto  $E$  è dato da (si veda Appendice B)

$$\frac{\Delta E}{E} = 2 \frac{m_A m_B}{(m_A + m_B)^2} (1 - \cos \chi) \quad (\chi \text{ è l'angolo di diffusione nel sistema del centro di massa}) \quad (39)$$

che, per  $\chi = \pi$ , a cui corrisponde il valore massimo di  $\Delta E$ , e per  $m_B \gg m_A$ , diviene

$$\frac{\Delta E}{E} \approx 4 \frac{m_A}{m_B} \ll 1 \quad (40)$$

Riferiamoci quindi al termine di collisione di Boltzmann espresso non in termini della variabile velocità  $\vec{v}$ , ma in termini della variabile energia  $E$  e della variabile  $\vec{\Omega}$ , versore della velocità. Questo termine può essere scritto in vari modi; facendo riferimento al metodo del *kernel* possiamo scrivere

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} = \int \{ f' v' \Sigma(E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) - f v \Sigma(E \rightarrow E', \vec{\Omega} \rightarrow \vec{\Omega}') \} dE' d\vec{\Omega}' \quad (41)$$

dove il primo termine della funzione integranda rappresenta il termine di guadagno, mentre il secondo, quello di perdita. Ricordiamo che

$$v' \Sigma(E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) dE d\vec{\Omega} \quad (42)$$

esprime la probabilità di transizione, per unità di tempo, dall'energia  $E'$  e direzione  $\vec{\Omega}'$  all'energia  $E$  in  $dE$  e direzione  $\vec{\Omega}$  in  $d\vec{\Omega}$  delle particelle test.

Ricordiamo anche che, tra la sezione d'urto macroscopica di diffusione  $\Sigma(E, \vec{\Omega})$  e la funzione probabilità di transizione vale la proprietà

$$v \Sigma(E, \vec{\Omega}) = \int v \Sigma(E \rightarrow E', \vec{\Omega} \rightarrow \vec{\Omega}') dE' d\vec{\Omega}' \quad (43)$$

così che il termine di perdita è dato più semplicemente da

$$f v \Sigma(E, \vec{\Omega}) \quad (44)$$

Il termine di collisione espresso dal l'Eq.(41) è una particolare forma del termine di collisione di Boltzmann per urti fra particelle test e particelle field. Quindi anche per questa specifica espressione di  $(\partial f / \partial t)_{coll}$  deve valere, come d'altronde può essere facilmente verificato, la proprietà

$$\int A(E) \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} dE = \int (A' - A) f v \Sigma(E \rightarrow E', \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}') dE' d\bar{\Omega}' dE \quad (45)$$

dove  $A(E)$  è una arbitraria funzione dell'energia e  $A' \equiv A(E') = A(E + \Delta E)$  avendo posto  $E' = E + \Delta E$ .

Per le ipotesi fatte, Eq.(40), si ha  $\frac{\Delta E}{E} \ll 1$  così che, se sviluppiamo in serie di Taylor

$A' = A(E + \Delta E)$  possiamo troncare lo sviluppo dopo i primi termini.

Avremo pertanto

$$A(E + \Delta E) \approx A(E) + \Delta E \frac{dA}{dE} + \frac{1}{2} (\Delta E)^2 \frac{d^2 A}{dE^2} \quad (46)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int A(E) \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} dE &= \int \Delta E \frac{dA}{dE} f v \Sigma(E \rightarrow E', \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}') dE' d\bar{\Omega}' dE + \\ &+ \frac{1}{2} \int (\Delta E)^2 \frac{d^2 A}{dE^2} f v \Sigma(E \rightarrow E', \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}') dE' d\bar{\Omega}' dE \end{aligned} \quad (47)$$

Seguiamo ora lo stesso procedimento del Cap.3 che ci ha consentito di passare dall'Eq.(14) all'Eq.(17). Consideriamo separatamente i due integrali della parte destra dell'Eq.(47). Integrando per parti rispetto ad E il primo integrale e ricordando che  $f(E=0) = f(E=\infty) = 0$  si ottiene

$$\int_0^{\infty} \Delta E \frac{dA}{dE} f v \Sigma(E \rightarrow E', \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}') dE = - \int_0^{\infty} A \frac{d}{dE} \left[ \Delta E f v \Sigma(E \rightarrow E', \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}') \right] dE \quad (48)$$

Integriamo poi il secondo integrale rispetto ad E due volte per parti; otteniamo

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\Delta E)^2 \frac{d^2 A}{dE^2} f v \Sigma(E \rightarrow E', \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}') dE = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} A \frac{d^2}{dE^2} \left[ (\Delta E)^2 f v \Sigma(E \rightarrow E', \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}') \right] dE \quad (49)$$

Definiamo ora i seguenti coefficienti

$$\langle \Delta E \rangle = \int \Delta E \Sigma(E \rightarrow E', \vec{\Omega} \rightarrow \vec{\Omega}') dE' d\vec{\Omega}' \quad (50a)$$

$$\langle (\Delta E)^2 \rangle = \int (\Delta E)^2 \Sigma(E \rightarrow E', \vec{\Omega} \rightarrow \vec{\Omega}') dE' d\vec{\Omega}' \quad (50b)$$

che, come nei casi precedenti, prendono rispettivamente il nome di *coefficienti di frizione dinamica* e di *diffusione in energia*. Quindi l'Eq.(47) può essere scritta come

$$\int_0^{\infty} A(E) \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} dE = \int_0^{\infty} A(E) \left[ -\frac{d}{dE} (vf \langle \Delta E \rangle) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dE^2} (vf \langle (\Delta E)^2 \rangle) \right] dE \quad (51)$$

In conclusione, poichè l'Eq.(51) deve essere verificata qualsiasi sia la funzione  $A(E)$ , il termine di collisione del tipo Fokker-Planck diviene

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} = -\frac{d}{dE} (vf \langle \Delta E \rangle) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dE^2} (vf \langle (\Delta E)^2 \rangle) \quad (52)$$

Per il calcolo dei coefficienti di Fokker-Planck è quindi necessario prima ricavare l'espressione della sezione d'urto per trasferimento di energia  $\Sigma(E \rightarrow E', \vec{\Omega} \rightarrow \vec{\Omega}')$ . Questa operazione non è affatto semplice e richiede spesso notevoli approssimazioni, a meno che non ci si metta in condizioni fisiche opportune che, seppur semplici, siano sufficientemente realistiche.

Per far questo considereremo interazioni del tipo "sfere rigide" già studiate nel capitolo precedente. Questa situazione fisica è certamente adatta per lo studio della diffusione dei neutroni termici in mezzi pesanti, se si tiene conto solo dell'effetto dell'agitazione termica (effetto Doppler) o della diffusione di microparticelle (o molecole) neutre in macroparticelle.

Dobbiamo inoltre stabilire per quali situazioni fisiche sono valide alcune proprietà del processo di diffusione:

1) la diffusione della particella test dopo l'urto non dipende né dalla direzione  $\vec{\Omega}$  che essa aveva prima dell'urto, né dalla direzione  $\vec{\Omega}'$  dopo l'urto, ma dipende solo dal coseno dell'angolo  $\vartheta_0$  fra i due versori  $\vec{\Omega}$  e  $\vec{\Omega}'$ ,  $\mu_0 = \cos \vartheta_0 = \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}'$ .

Questo si verifica esattamente in un gas, in un liquido o in un solido amorfo ed anche, con buona approssimazione in un solido policristallino.

Avremo in questi casi

$$\Sigma(E \rightarrow E', \vec{\Omega} \rightarrow \vec{\Omega}') = \frac{1}{2\pi} \Sigma(E \rightarrow E', \mu_0) \quad (53)$$

2) La sezione d'urto di diffusione è, per il caso "sfere rigide" indipendente dalla velocità (si veda capitolo precedente) e l'urto è isotropo nel sistema di riferimento del centro di massa. Poiché stiamo considerando il caso  $m_A/m_B \ll 1$  possiamo assumere l'urto isotropo anche nel sistema del laboratorio cosicché  $\Sigma(E \rightarrow E', \mu_0)$  è, con buona approssimazione, indipendente da  $\mu_0$  e si può porre

$$\langle \Delta E \rangle = \int \Delta E \Sigma(E \rightarrow E') dE' \quad (54a)$$

$$\langle (\Delta E^2) \rangle = \int (\Delta E)^2 \Sigma(E \rightarrow E') dE' \quad (54b)$$

dove  $\frac{1}{2} \Sigma(E \rightarrow E') = \Sigma(E \rightarrow E', \mu_0)$ .

3) se si assume che la funzione di distribuzione delle particelle field sia la distribuzione maxwelliana, Eq.(37) si ottiene (sezione d'urto di trasferimento d'energia di Brown e St. John)

$$\begin{aligned} \Sigma(E' \rightarrow E) = \eta^2 \frac{N\sigma_0}{E'} \left\{ \exp\left(\frac{E' - E}{KT}\right) \left[ \text{Erf}\left(\eta\sqrt{\frac{E'}{KT}} - \rho\sqrt{\frac{E}{KT}}\right) \pm \text{Erf}\left(\eta\sqrt{\frac{E'}{KT}} + \rho\sqrt{\frac{E}{KT}}\right) \right] + \right. \\ \left. + \text{Erf}\left(\eta\sqrt{\frac{E}{KT}} - \rho\sqrt{\frac{E'}{KT}}\right) \mp \text{Erf}\left(\eta\sqrt{\frac{E}{KT}} + \rho\sqrt{\frac{E'}{KT}}\right) \right\} \end{aligned} \quad (55)$$

dove  $N$  è la densità delle particelle field,  $\sigma_0$  è la sezione d'urto totale delle interazioni fra le particelle test e le particelle field,

$$\eta = \frac{A+1}{2\sqrt{A}} \quad ; \quad \rho = \frac{A-1}{2\sqrt{A}} \quad (56)$$

con  $A = m_B/m_A$ .  $\text{Erf}(x)$  è la funzione errore così definita

$$\text{Erf}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x e^{-u^2} du \quad (57)$$

Nell'Eq.(55) il segno superiore deve essere usato se  $E' > E$ , quello inferiore se  $E' < E$ .

Poiché, per le ipotesi fatte,  $A \gg 1$ , possiamo porre  $\eta = \rho \cong \frac{\sqrt{A}}{2}$  e l'Eq.(55) può essere così semplificata

$$\Sigma(E' \rightarrow E) = \frac{m_B}{4m_A} \frac{N\sigma_0}{E'} \left\{ \exp\left(\frac{E' - E}{KT}\right) \left[ \operatorname{Erf}\left(\frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{KT}}(\sqrt{E'} - \sqrt{E})\right) \pm \operatorname{Erf}\left(\frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{KT}}(\sqrt{E'} + \sqrt{E})\right) \right] + \right. \\ \left. + \operatorname{Erf}\left(\frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{KT}}(\sqrt{E} - \sqrt{E'})\right) \mp \operatorname{Erf}\left(\frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{KT}}(\sqrt{E} + \sqrt{E'})\right) \right\} \quad (58)$$

Come abbiamo già detto, l'Eq.(58) può essere usata nel caso in cui le particelle  $A$  siano neutroni, o micromolecole che rallentano e diffondono in un gas costituito da particelle tali per cui il rapporto  $m_B/m_A$  sia molto maggiore di 1.

La validità dell'Eq.(58) può anche essere estesa al caso in cui le particelle field siano nella fase liquida. Come ben noto infatti, mentre in un gas neutro le densità sono basse (basse in relazione alla distanza media fra le molecole e il raggio medio delle forze di interazione) e le molecole sono poco legate fra di loro, in un liquido le densità sono molto maggiori e le molecole sono molto più legate. Si ha così che, quando una particella test  $A$  "urta" una particella field  $B$ , essendo quest'ultima molecola molto legata alle altre molecole vicine, è come se l'interazione avvenisse con un "cluster" di molecole più o meno legate fra loro.

Per rappresentare questo effetto, possiamo usare un modello molto semplice, ma proprio per questo molto utile, che consiste nel sostituire la massa *effettiva* delle molecole del liquido con una massa *efficace* maggiore di quella *effettiva*. Consideriamo in tal modo un liquido come se fosse un gas le cui molecole hanno una massa molto maggiore di quelle del liquido stesso e, conseguentemente, anche di quelle delle particelle test.

Con l'introduzione di una massa *efficace*, l'Eq.(58) può quindi essere usata anche nel caso di molecole che diffondono in un liquido.

Possiamo ora semplificare ulteriormente l'Eq.(58) per alcuni casi specifici sempre nell'ipotesi che  $m_A/m_B$  sia molto minore di 1.

Poiché le particelle field  $B$  hanno una distribuzione Maxwelliana alla temperatura  $T$ , la loro energia media sarà  $\langle E_B \rangle = \frac{3}{2}KT$  e all'equilibrio, anche le particelle  $A$  avranno un'energia media

$\langle E_A \rangle = \frac{3}{2}KT$ , pur essendo la loro velocità media  $\langle v_A \rangle$  molto maggiore della velocità media  $\langle v_B \rangle$ . Si ha infatti

$$\frac{\langle v_A \rangle}{\langle v_B \rangle} = \left( \frac{m_B}{m_A} \right)^{1/2} \gg 1 \quad (59)$$

Consideriamo il caso per cui, quando il processo ha inizio, l'energia media delle particelle test  $\langle E_A \rangle(t=0)$  sia molto vicina all'energia media delle particelle  $B$

$$\frac{\langle E_A \rangle(t=0)}{\langle E_B \rangle} \approx 1 \quad (60)$$

In altre parole, non stiamo analizzando un processo di *rallentamento* ma di *termalizzazione*.

Pertanto, riferendoci al termine esponenziale dell'Eq.(58), possiamo approssimare

$$e^{\frac{E'-E}{KT}} \approx e^{\frac{E'-E}{E}} \approx 1 + \frac{E'-E}{KT} \quad (61)$$

Per quanto riguarda la funzione errore, osserviamo che

$$\text{Erf}(-z) = -\text{Erf}(z) \quad (62)$$

Cosicché, tenuto conto dell'Eq.(61), otteniamo infine

$$\Sigma(E' \rightarrow E) \approx \frac{m_B}{4m_A} \frac{N\sigma_0}{E'} \frac{E'-E}{KT} \left[ \text{Erf}\left(\frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{KT}}(\sqrt{E'} - \sqrt{E})\right) \pm \text{Erf}\left(\frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{KT}}(\sqrt{E'} + \sqrt{E})\right) \right] \quad (63)$$

L'espressione approssimata della sezione d'urto di trasferimento di energia,  $\Sigma(E' \rightarrow E)$ , come data dall' Eq.(63) va quindi introdotta nelle Eq.(54) per il calcolo dei coefficienti di Fokker-Planck. Una notevole semplificazione si ha se si può considerare nulla la velocità iniziale delle particelle field, come nel caso del rallentamento dei neutroni. Se questa approssimazione è giustificata, per il caso di interazioni *sphere rigide* si ha (si veda Appendice B)

$$\sigma(E \rightarrow E')dE' = \frac{D^2 \pi (m + m_B)^2}{2} \frac{dE'}{2mm_B E} \quad (64)$$

mentre per il caso di interazioni Coulombiane si ottiene

$$\sigma(E \rightarrow E')dE' = \frac{\pi \xi^2 m dE'}{m_B E (E - E')^2} [U(E - \alpha E) - U(E - \beta E)] \quad (65)$$

dove  $U(\chi)$  è la funzione scalino.

## 7. Termine di collisione di Fokker-Planck di un gas “degenero”

Vogliamo ora estendere il termine di collisione, Eq.(20), al caso di un sistema di particelle test “degeneri”. Infatti, i risultati ottenuti fino ad ora sono validi nell'ambito della meccanica classica, cioè per quei sistemi per i quali gli effetti quantistici possono essere trascurati.

Per stabilire quando questo è possibile, si ricorre spesso al parametro di Sommerfeld  $S$  che definisce il grado di degenerazione di un gas

$$S = \frac{h^3 n}{\gamma (2\pi mKT)^{3/2}} \quad (66)$$

dove  $h$  è la costante di Planck,  $\gamma$  è “il peso statistico” di una particella. Nel caso degli elettroni, essendo il loro spin uguale a  $1/2$ , il loro peso statistico  $\gamma$  è uguale a 2. In questo caso, essendo lo spin un numero semi intero, deve valere il principio di esclusione di Pauli e deve essere usata la statistica di Fermi-Dirac. Nell’Eq.(66)  $n, T$  ed  $m$  sono la densità, la temperatura e la massa delle particelle. Se  $S \ll 1$  il grado di degenerazione è molto basso e gli effetti quantistici possono essere trascurati (caso meccanica classica); se  $S \gg 1$  la degenerazione è pressoché completa ed è necessario ricorrere alla meccanica quantistica.

Infine, se  $S$  ha valori dell’ordine dell’unità, la degenerazione è bassa, ma gli effetti quantistici non possono esser trascurati se si vogliono avere risultati validi. Tuttavia, in quest’ultimo caso è sufficiente apportare opportune correzioni ai risultati della meccanica classica, che costituiscono la parte dominante della soluzione, (approssimazione semi-classica), anche perché, risolvere problemi complessi con molte particelle non in equilibrio termodinamico nell’ambito rigoroso della meccanica quantistica, richiede l’introduzione di notevoli approssimazioni.

In questo capitolo ci riferiremo agli elettroni di un plasma completamente ionizzato e ricaveremo il termine di collisione di Fokker-Planck relativo agli urti degli elettroni contro gli ioni.

Al fine di introdurre le correzioni quantistiche nel termine di collisione  $(\partial f / \partial t)_{coll}$  dell’equazione cinetica degli elettroni, è quindi necessario, come abbiamo detto, tener conto del principio di esclusione di Pauli.

Il termine di collisione che tiene conto di questo principio è stato ricavato da Uehling-Uhlenbeck e può essere scritto come un bilancio fra i termini di guadagno e di perdita

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} = \int \left\{ fF' \left(1 - \frac{h^3 f}{\gamma m^3}\right) - fF \left(1 - \frac{h^3 f'}{\gamma m^3}\right) \right\} gS(g, \chi) \sin \chi d\chi d\varphi d\vec{v} \quad (67)$$

dove  $f(\vec{v})$  e  $F(\vec{V})$  sono le funzioni di distribuzione degli elettroni e degli ioni,  $f' \equiv f(\vec{v}')$  e  $F' \equiv F(\vec{V}')$ .

Va ricordato che, per il principio di esclusione di Pauli, non vi possono essere più di  $V(m/h)^3 d\vec{v}$  elettroni in un volume  $V$  con velocità nell’intervallo  $d\vec{v}$ . Se ricordiamo che  $Vf(\vec{v})d\vec{v}$  dà il numero di elettroni che hanno velocità nell’intervallo  $d\vec{v}$  nel volume  $V$ , il fattore

$$1 - \frac{Vf(\vec{v})d\vec{v}}{V\gamma(m/h)^3 d\vec{v}} = 1 - \frac{f(\vec{v})h^3}{\gamma m^3} \quad (68)$$

che compare nell’Eq.(67), riduce la probabilità che in seguito a una collisione un elettrone possa acquistare velocità in  $d\vec{v}$ .

Ricordiamo che, risolvendo l’equazione  $(\partial f / \partial t)_{coll} = 0$ , la funzione di distribuzione di equilibrio  $f_0(v)$  è data da

$$f_0(v) = xp \frac{\gamma m^3}{h^3} \frac{1}{1 + A \exp(mv^2/2kt)} \quad (69)$$

che è la distribuzione di Fermi.

Osserviamo ora che il termine di collisione di Uehling-Uhlenbeck, Eq.(67), gode della proprietà

$$\int A(\vec{v}) \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} d\vec{v} = \int (A' - A) f F \left( 1 - \frac{h^3 f'}{\gamma m^3} \right) g S(g, \chi) \text{sen} \chi dx dy d\vec{V} d\vec{v} \quad (70)$$

dove  $A(\vec{v})$  è una arbitraria funzione di  $\vec{v}$  e  $A' \equiv A(\vec{v}') = A(\vec{v} + \Delta\vec{v})$ . Se sviluppiamo in serie di Taylor  $A'$  e tronchiamo lo sviluppo dopo i primi termini, essendo la forza di interazione fra elettroni e ioni a lungo raggio, e tenuto conto di quanto detto nei capitoli precedenti, otteniamo

$$A(\vec{v} + \Delta\vec{v}) = A(\vec{v}) + \Delta\vec{v} \cdot \frac{\partial A(\vec{v})}{\partial \vec{v}} + \frac{1}{2} \Delta\vec{v} \Delta\vec{v} : \frac{\partial^2 A(\vec{v})}{\partial \vec{v} \partial \vec{v}} \quad (71)$$

Se ora si inserisce lo sviluppo di Eq.(71) nell'Eq.(70) e si prosegue con lo stesso procedimento dei capitoli precedenti si ha

$$\int A(\vec{v}) \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} d\vec{v} = \int A(\vec{v}) \left\{ - \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \cdot f \left( 1 - \frac{h^3 f'}{\gamma m^3} \right) \langle \Delta\vec{v} \rangle + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \vec{v} \partial \vec{v}} : f \left( 1 - \frac{h^3 f'}{\gamma m^3} \right) \langle \Delta\vec{v} \Delta\vec{v} \rangle \right\} d\vec{v} \quad (72)$$

avendo definito

$$\langle \Delta\vec{v} \rangle = \int \Delta\vec{v} y S(g, \chi) F(\vec{V}) \text{sen} \chi d\chi dy d\vec{V} \quad (73a)$$

$$\langle \Delta\vec{v} \Delta\vec{v} \rangle = \int \Delta\vec{v} \Delta\vec{v} g S(g, \chi) F(\vec{V}) \text{sen} \chi d\chi d\varphi d\vec{V} \quad (73b)$$

che sono i coefficienti di *frizione dinamica* e di *diffusione* nello spazio delle velocità.

In conclusione, poiché  $A(\vec{v})$ , come abbiamo detto, è una funzione arbitraria, si ha

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} = - \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot (f \langle \Delta\vec{v} \rangle) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \vec{v} \partial \vec{v}} : (f \langle \Delta\vec{v} \Delta\vec{v} \rangle) + \frac{h^3}{\gamma m^3} \left[ \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot (ff' \langle \Delta\vec{v} \rangle) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \vec{v} \partial \vec{v}} : (ff' \langle \Delta\vec{v} \Delta\vec{v} \rangle) \right] \quad (74)$$

che è il termine di collisione di Fokker-Planck corretto per tener conto degli effetti quantistici.

Come si vede dall'Eq.(74) il termine di correzione quantistica è dell'ordine di  $h^3$ .

## Appendice A

I coefficienti di Fokker-Planck, come definiti nel testo, Eq.(18) e Eq.(21), sono

$$\langle \Delta \vec{v} \rangle = \int \Delta \vec{v} g S(\chi) f_B d\omega d\vec{v}_B = \int \{ \Delta \vec{v} \} f_B d\vec{v}_B \quad (1A)$$

$$\langle \Delta \vec{v} \Delta \vec{v} \rangle = \int \Delta \vec{v} \Delta \vec{v} g S(\chi) f_B d\omega d\vec{v}_B = \int \{ \Delta \vec{v} \Delta \vec{v} \} f_B d\vec{v}_B \quad (2A)$$

Vogliamo ricavare questi coefficienti per il caso di interazioni del tipo *sfere rigide* (Cap.5) riferendoci a un sistema cartesiano ortogonale con l'asse delle  $z$  orientato secondo la direzione di  $\vec{g}$ .

Iniziamo con il calcolo del coefficiente di frizione dinamica

$$\langle \Delta v_z \rangle = \int \{ \Delta v_z \} f_B d\vec{v}_B = \pi D^2 M \int g^2 f_B d\vec{v}_B = \pi M D^2 I \quad (3A)$$

con

$$f_B(v_B) d\vec{v}_B = n_B \left( \frac{m_B}{2\pi K T} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_B v_B^2}{2K T}} d\vec{v}_B \quad (4A)$$

Per calcolare l'integrale  $I$  di Eq.(3.A), esprimiamo la velocità  $\vec{v}_B$  in termini delle coordinate sferiche  $v_B$ ,  $\mathcal{G}$  e  $\varphi$  con asse polare diretto lungo  $\vec{v}_A$ ; avremo  $d\vec{v}_B = v_B^2 \sin \mathcal{G} d\mathcal{G} d\varphi dv_B$  e

$$g^2 = v_A^2 + v_B^2 - 2v_A v_B \cos \mathcal{G} \quad (5A)$$

Pertanto l'integrale  $I$  diviene

$$\begin{aligned}
I &= \int \{\Delta v_z\} f_B d\vec{v}_B = \pi D^2 M \int g^2 f_B d\vec{v}_B = \\
&= n_B \left( \frac{m_B}{2\pi KT} \right)^{3/2} \int (v_A^2 + v_B^2 - 2v_A v_B \cos \vartheta) v_B^2 e^{-\frac{m_B v_B^2}{2KT}} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dv_B = \quad (6A) \\
&= n_B (I_1 + I_2 + I_3)
\end{aligned}$$

con

$$I_1 = n_B \left( \frac{m_B}{2\pi KT} \right)^{3/2} v_A^2 \int v_B^2 e^{-\frac{m_B v_B^2}{2KT}} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dv_B = n_B v_A^2 \quad (7A)$$

$$I_2 = n_B \left( \frac{m_B}{2\pi KT} \right)^{3/2} \int v_B^4 e^{-\frac{m_B v_B^2}{2KT}} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dv_B = n_B \frac{3KT}{m_B} \quad (8A)$$

$$I_3 = n_B \left( \frac{m_B}{2\pi KT} \right)^{3/2} 2v_A \int v_B^3 e^{-\frac{m_B v_B^2}{2KT}} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dv_B = 0 \quad (9A)$$

e quindi

$$I = n_B \left( v_A^2 + \frac{3KT}{m_B} \right) \quad (10A)$$

In conclusione, il coefficiente di frizione dinamica per interazioni *sfere rigide* è dato dalla seguente espressione

$$\langle \Delta v_z \rangle = n_B \pi M D^2 \left( v_A^2 + \frac{3KT}{m_B} \right) = n_B \pi M D^2 (v_A^2 + \langle v_B^2 \rangle) \quad (11A)$$

dove  $\langle v_B^2 \rangle$  è la velocità quadratica media.

Osserviamo che le particelle test tendono, con il passare del tempo, a portarsi all'equilibrio con le particelle field che, ricordiamo, hanno una distribuzione Maxwelliana alla temperatura  $T$ .

Ci riferiamo al caso considerato nel Cap.5 con un rapporto fra le masse  $\frac{m_B}{m_A} < 10^{-8}$ .

Quindi, all'equilibrio, le particelle test  $A$  avranno una velocità quadratica media  $\langle v_A^2 \rangle$  tale che

$$\langle v_A^2 \rangle = \frac{3KT}{m_A} \ll \frac{3KT}{m_B} = \langle v_B^2 \rangle \quad (12A)$$

Anche se la velocità quadratica iniziale  $v_0^2$  delle particelle A è  $v_0^2 \cong 10^6 \langle v_A^2 \rangle$  potremmo porre

$$v_A^2 + \frac{3KT}{m_B} = v_A^2 + \langle v_B^2 \rangle \cong \frac{3KT}{m_B} \quad (13A)$$

così che possiamo approssimare  $\langle \Delta v_z \rangle$  come

$$\langle \Delta v_z \rangle = n_B \pi M D^2 \frac{3KT}{m_B} \quad (14A)$$

Proseguiamo con il calcolo del coefficiente di diffusione; iniziamo con

$$\langle (\Delta v_z)^2 \rangle = \int \{ (\Delta v_z)^2 \} f_B d\vec{v}_B = \frac{4}{3} \pi M^2 D^2 \int g^3 f_B d\vec{v}_B = \frac{4}{3} \pi M^2 D^2 J \quad (15A)$$

con  $f_B$  e  $g$  dati rispettivamente dall' Eq.(4.A) e dall'Eq.(5.A) e

$$J = n_B 2\pi \left( \frac{m_B}{2\pi KT} \right)^{3/2} \int (v_A^2 + v_B^2 - 2v_A v_B \cos \vartheta)^{3/2} v_B^2 e^{-\frac{m_B v_B^2}{2KT}} \sin \vartheta d\vartheta dv_B \quad (16A)$$

avendo già eseguito l'integrazione rispetto a  $\varphi$ . Eseguiamo prima l'integrazione rispetto a  $\vartheta$ . Dobbiamo calcolare l'integrale del tipo

$$-\int_{-1}^1 (a + bx)^{3/2} dx = -\frac{2}{5b} \left[ (a + b)^{5/2} - (a - b)^{5/2} \right] \quad (17A)$$

con  $a = v_A^2 + v_B^2$  e  $b = -2v_A v_B$ . Osserviamo che

$$(a + b)^{5/2} = (v_A - v_B)^5 \quad ; \quad (a - b)^{5/2} = (v_A + v_B)^5 \quad (18A)$$

così che l'integrale  $J$  è dato da

$$\begin{aligned}
 J &= n_B 2\pi \left( \frac{m_B}{2\pi KT} \right)^{3/2} \int e^{-\frac{m_B v_B^2}{2KT}} \frac{v_B}{5v_A} \left[ (v_A + v_B)^5 - (v_A - v_B)^5 \right] dv_B = \\
 &= n_B \left( \frac{m_B}{2KT} \right)^{3/2} v_A^3 \left[ \left( \frac{2KT}{m_B} \right)^{3/2} + \frac{3}{v_A^2} \left( \frac{2KT}{m_B} \right)^{5/2} + \frac{3}{4v_A^4} \left( \frac{2KT}{m_B} \right)^{7/2} \right]
 \end{aligned} \tag{19A}$$

e quindi

$$\langle (\Delta v_z)^2 \rangle = n_B \frac{4}{3} \pi M^2 D^2 v_A^3 \left[ 1 + \frac{6KT}{m_B v_A^2} + \frac{3(KT)^2}{m_B^2 v_A^4} \right] \cong n_B \frac{4}{3} \pi M^2 D^2 \frac{3(KT)^2}{v_A m_B^2} \tag{20A}$$

Procedendo in modo del tutto analogo otteniamo

$$\langle (\Delta v_x)^2 \rangle = \langle (\Delta v_y)^2 \rangle = n_B \frac{\pi}{3} M^2 D^2 v_A^3 \left[ 1 + \frac{6KT}{m_B v_A^2} + \frac{3(KT)^2}{m_B^2 v_A^4} \right] \cong n_B \frac{\pi}{3} M^2 D^2 \frac{3(KT)^2}{v_A m_B^2} \tag{21A}$$

## Appendice B

Come abbiamo detto nel testo, lo stato di un sistema dinamico dipende, spesso in modo determinante, dall'interazione mutua delle particelle del sistema. Poiché le particelle (molecole, atomi, ecc.) esercitano fra di loro delle forze, dovute ai campi connessi alla natura delle particelle stesse, diremo che una particella subisce un urto quando entra nel raggio di forza di un'altra particella o di altre particelle. Un urto fra due o più particelle deve quindi essere pensato come una interazione, governata dai campi che agiscono su ciascuna delle particelle, che altera il moto delle particelle interagenti. Se la durata di un urto è molto piccola in confronto al tempo medio che intercorre fra due collisioni, si può trascurare l'energia potenziale di interazione rispetto all'energia cinetica totale delle particelle e il sistema si dice perfetto.

Fra i vari fenomeni di interazione o di urto quelli binari, quelli cioè in cui solo due particelle sono interessate, sono di fondamentale importanza per lo studio dell'evoluzione in spazio e in tempo di un sistema, sia perché descrivono con sufficiente accuratezza molte situazioni fisiche, sia perché le interazioni multiple possono essere pensate come se fossero un certo numero di collisioni binarie simultanee.

Possiamo distinguere due tipi di urti binari:

- 1) urti elastici in cui le particelle interagenti non cambiano la loro energia interna. Sono quindi sufficienti le leggi di conservazione del momento e dell'energia per determinare il moto delle particelle;
- 2) urti anelastici in cui l'energia interna di una o di ambedue le particelle cambia per effetto della collisione o viene generata una nuova particella.

In questa appendice ci occuperemo solamente di urti binari elastici e, per semplicità di scrittura, non scriveremo il pedice  $A$ .

Consideriamo l'urto fra due particelle  $A$  e  $B$  di massa  $m$  e  $m_B$  rispettivamente e supponiamo che il potenziale di interazione  $\phi(r)$  dipenda solo dalla distanza di separazione fra  $A$  e  $B$  così che la forza che le particelle esercitano fra di loro sia diretta lungo la linea che congiunge i loro centri.

Vogliamo studiare il moto delle due particelle soggette soltanto alla forza di interazione. Siamo interessati solamente alle velocità iniziali e finali di  $A$  e  $B$ , cioè alla velocità che le particelle hanno prima di interagire, essendo a distanza superiore a quella efficace per la forza di interazione, e alla velocità dopo che l'urto è avvenuto e le particelle si muovono indipendentemente alla forza di interazione. Gli indici  $A$  e  $B$  le grandezze che si riferiscono alla particella  $A$  e alla particella  $B$  rispettivamente; l'apostrofo indica la velocità dopo l'urto e l'asterisco la velocità relativa al sistema di riferimento del centro di massa ( $C.M.$ ). Il centro di massa fra le due particelle  $A$  e  $B$  è definito come quel punto rispetto al quale la somma dei momenti delle masse delle due particelle è uguale a zero.

Così se  $\vec{r}_c$  è la posizione del centro di massa quando le particelle  $A$  e  $B$  sono in  $\vec{r}$  e  $\vec{r}_B$  si ha

$$m(\vec{r} - \vec{r}_c) - m_B(\vec{r}_B - \vec{r}_c) = 0 \quad (1B)$$

da cui

$$\vec{r}_c = \frac{m\vec{r} + m_B\vec{r}_B}{m + m_B} \quad (2B)$$

Deriviamo l'Eq. (2B) rispetto al tempo e indichiamo con  $\vec{v}_c$  la velocità del centro di massa; otteniamo

$$\vec{v}_c = \frac{m\vec{v} + m_B\vec{v}_B}{m + m_B} \quad (3B)$$

Per la velocità del baricentro dopo l'urto si ha, con procedimento analogo al precedente

$$\vec{v}'_c = \frac{m\vec{v}' + m_B\vec{v}'_B}{m + m_B} \quad (4B)$$

che, dal confronto con l'Eq. (3B) e per la legge di conservazione della quantità di moto, stabilisce che  $\vec{v}_c = \vec{v}'_c$ , cioè la velocità del centro di massa è una costante.

Dimostriamo ora che la velocità prima dell'urto,  $\vec{g}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v} = -\vec{g}_{AB} = -(\vec{v} - \vec{v}_B)$ , è uguale in modulo a quella dopo l'urto,  $\vec{g}'_{BA} = (\vec{v}'_B - \vec{v}') = -\vec{g}'_{AB} = -(\vec{v}' - \vec{v}'_B)$ .

Introduciamo a questo scopo la velocità delle particelle nel sistema di riferimento C.M.;

$$\vec{v}^* = \vec{v} - \vec{v}_c = -\vec{g}_{BA} \frac{m_B}{m + m_B} \quad (5B,a)$$

$$\vec{v}_B^* = \vec{v}_B - \vec{v}_c = -\vec{g}_{BA} \frac{m}{m + m_B} \quad (5B,b)$$

$$\vec{v}'_A^* = \vec{v}' - \vec{v}'_c = -\vec{g}'_{BA} \frac{m_B}{m + m_B} \quad (5B,c)$$

$$\vec{v}'_B^* = \vec{v}'_B - \vec{v}'_c = -\vec{g}'_{BA} \frac{m}{m + m_B} \quad (5B,d)$$

Se ora sostituiamo nell'equazione che esprime la legge di conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}(mv^2 + m_B v_B^2) = \frac{1}{2}(mv'^2 + m_B v_B'^2) \quad (6B)$$

le espressioni di  $v^2$ ,  $v_B^2$ ,  $v'^2$  e  $v_B'^2$  come si possono ottenere dalle equazioni (5), otteniamo

$$v_c^2(m + m_B) + g_{AB}^2 \frac{mm_B}{m + m_B} = v_c'^2(m + m_B) + g'_{BA}{}^2 \frac{mm_B}{m + m_B} \quad (7B)$$

da cui

$$|\vec{g}_{BA}| = |\vec{g}'_{BA}| = g \quad (8B)$$

e quindi la velocità relativa può cambiare solo in direzione, ma non in modulo. L'effetto dinamico dell'urto è conosciuto quando è determinato il cambiamento in direzione di  $\vec{g}_{BA}$ . Dalle Eq.(5B) e dalla Eq.(8B) abbiamo anche

$$|\vec{v}^*| = |\vec{v}'^*| \quad ; \quad |\vec{v}_B^*| = |\vec{v}'_B^*| \quad (9B)$$

cioè il modulo della velocità di una particella nel sistema C.M. non cambia durante l'urto. Le Eq.(5B) permettono anche di calcolare il cambiamento della velocità che le particelle subiscono per effetto dell'urto. Se infatti sottraiamo la Eq.(5B,a) dalla Eq.(5B,c) e la Eq.(5B,b) dalla Eq.(5B,d) otteniamo

$$\vec{v}' - \vec{v} = \frac{m_B}{m + m_B} (\vec{g}_{BA} - \vec{g}'_{BA}) \quad (10B,a)$$

$$\vec{v}'_B - \vec{v}_B = \frac{m}{m + m_B} (\vec{g}'_{BA} - \vec{g}_{BA}) \quad (10B,b)$$

Vogliamo ora calcolare la variazione di energia che la particella  $A$  subisce in seguito ad un urto contro la particella  $B$ . Per semplicità di scrittura non scriveremo il pedice  $A$ . Partendo dalle Eq.(10B) si ottiene

$$v^2 = \left( \vec{v}_c - \vec{g} \frac{m_B}{m + m_B} \right)^2 = v_c^2 + g^2 \frac{m_B^2}{(m + m_B)^2} - 2\vec{v}_c \cdot \vec{g} \frac{m_B}{m + m_B} \quad (11B,a)$$

$$v'^2 = \left( \vec{v}_c - \vec{g}' \frac{m_B}{m + m_B} \right)^2 = v_c^2 + g'^2 \frac{m_B^2}{(m + m_B)^2} - 2\vec{v}_c \cdot \vec{g}' \frac{m_B}{m + m_B} \quad (11B,b)$$

da cui

$$\Delta E = E - E' = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v'^2 = \frac{m m_B}{m + m_B} \vec{v}_c \cdot (\vec{g}' - \vec{g}) \quad (12B)$$

Se si sostituisce in questa equazione il valore di  $\vec{v}_c$  in funzione di  $\vec{v}$  e  $\vec{v}_B$  dato dall'Eq.(3B) si ottiene

$$\Delta E = - \frac{m m_B}{(m + m_B)^2} (m\vec{v} + m_B\vec{v}_B) \cdot (\vec{g} - \vec{g}') \quad (13B)$$

Il vettore  $\vec{g} - \vec{g}'$  in coordinate cartesiane con l'asse  $z$  coincidente con il vettore  $\vec{g}$  è dato da

$$\vec{g} - \vec{g}' = -g \left[ \text{sen} \chi \cos \varphi \hat{i} + \text{sen} \chi \text{sen} \varphi \hat{j} - (1 - \cos \chi) \hat{k} \right] \quad (14B)$$

Così che, in definitiva, si ha

$$\Delta E = -\frac{mm_B}{(m+m_B)^2} (m\vec{v} + m_B\vec{v}_B) \cdot g \left[ \text{sen} \chi \cos \varphi \hat{i} + \text{sen} \chi \text{sen} \varphi \hat{j} - (1 - \cos \chi) \hat{k} \right] \quad (15B)$$

Se la velocità iniziale della particella  $B$  è nulla, si ha  $\vec{v} = \vec{g}$  e  $v_c = m\vec{g}/(m+m_B)$  e

$$\Delta E = \frac{mm_B}{(m+m_B)^2} mv^2 (1 - \cos \chi) = \frac{2mm_B}{(m+m_B)^2} E (1 - \cos \chi) \quad (16B)$$

In conclusione la frazione di energia  $\Delta E/E$  persa dalla particella  $A$  in seguito ad un urto contro la particella  $B$  inizialmente ferma è proporzionale a  $mm_B/(m+m_B)^2$ .

Ricaviamo ora l'espressione di  $\Sigma(E \rightarrow E')dE'$  per questo caso, cioè per il caso che sia possibile trascurare la velocità iniziale della particella  $B$  quando gli urti fra le particelle sono del tipo sfere rigide.

Ricordiamo che per urti di questo tipo la funzione di distribuzione angolare, integrata sull'azimut  $\varphi$  fra  $0$  e  $2\pi$ , è data da

$$S(\chi) = \frac{D^2 \pi}{2} \quad (17B)$$

dove  $D = R + R_B$  e  $R$  e  $R_B$  sono i raggi delle due sfere che collidono.

Eseguiamo quindi un cambiamento di variabile dall'angolo  $\chi$  all'energia dopo l'urto  $E'$ .

Deve valere la seguente uguaglianza

$$\begin{aligned} S(\chi) \text{sen} \chi d\chi &= \frac{D^2 \pi}{2} \text{sen} \chi d\chi = \frac{D^2 \pi}{2} \text{sen} \chi \left| \frac{d\chi}{dE'} \right| dE' = \\ &= \sigma(E \rightarrow E') dE' = \frac{1}{n_B} \Sigma(E \rightarrow E') dE' \end{aligned} \quad (18B)$$

Ricordando che  $\Sigma = n_B \sigma$ , essendo  $n_B$  la densità delle particelle field.

Si deve considerare il valore assoluto della derivata poiché  $d\chi/dE'$  può essere negativa (come in questo caso) o positiva, mentre la  $S(\chi)$  deve essere sempre positiva.

$E'$  deve essere compreso nell'intervallo  $E(1 - \alpha)$  e

$$\alpha = \left( \frac{m_B/m - 1}{m_B/m + 1} \right)^2 \quad (19B)$$

Dalla relazione fra  $E'$  e  $\chi$ , (Eq.16B), si ha

$$\cos \chi = \frac{E' - E}{E} \frac{(m + m_B)^2}{2mm_B} + 1 \quad (20B)$$

o anche, differenziando,

$$- \text{sen} \chi d\chi = \frac{(m + m_B)^2}{2mm_B} \frac{dE'}{E} \quad (21B)$$

così che

$$\left| \frac{d\chi}{dE'} \right| = \frac{(m + m_B)^2}{2mm_B} \frac{1}{E \text{sen} \chi} \quad (22B)$$

Si ottiene infine

$$\sigma(E \rightarrow E') dE' = \frac{D^2 \pi}{2} \frac{(m + m_B)^2}{2mm_B} \frac{dE'}{E} \quad (23B)$$

Si trova così che la sezione d'urto per trasferimento di energia è indipendente dall'energia finale  $E'$ . Inoltre, maggiore è l'energia iniziale  $E$  minore è la probabilità che  $E'$  sia in  $dE'$ . Questo è dovuto al fatto che l'intervallo  $E(1 - \alpha)$  aumenta all'aumentare di  $E$ .

La sezione d'urto di diffusione  $\sigma_0$  si può ricavare dall'Eq.(23A). Si ha infatti

$$\sigma_0 = \int \sigma(E \rightarrow E') dE' = \frac{D^2 \pi (m + m_B)^2}{2mm_B} \frac{1}{E} \int_{\alpha E}^E dE' = D^2 \pi \quad (24B)$$

Osserviamo che

$$1 - \alpha = \frac{4mm_B}{(m + m_B)^2} \quad (25B)$$

Consideriamo ora un altro caso d'interesse applicativo; precisamente il caso di interazioni Coulombiane, sempre nell'ipotesi che la velocità iniziale delle particelle  $B$  sia uguale a zero. In particolare ci riferiamo a elettroni come particelle test e a ioni come particelle field. La funzione di distribuzione angolare è in questo caso data dall'Eq.(25)

$$S(\chi) = \frac{p_c^2}{(1 - \cos \chi)^2} \quad (26B)$$

Nell'espressione che dà il rapporto  $\Delta E/E$ , Eq.(16B), l'energia finale deve essere compresa fra i due limiti  $\alpha E$  e  $\beta E$  con  $\alpha$  dato dall'Eq.(19B) e

$$\beta = 1 - 2 \frac{m'^2}{mm_B} (1 - \cos \chi_0) \quad (27B)$$

dove  $m'$  è la massa ridotta  $m' = mm_B / (m + m_B)$  e  $\chi_0$  è l'angolo di deflessione che corrisponde al massimo parametro d'urto che, nel caso di un plasma, può essere preso uguale alla lunghezza di Debye  $\lambda_D$ , così che

$$\tan\left(\frac{\chi_0}{2}\right) = \frac{\xi}{m'g^2\lambda_D} \quad (28B)$$

e  $\xi = qq_B / (4\pi\epsilon_0)$ .

L'Eq.(18B) diviene in questo caso

$$S(\chi) \sin \chi d\chi = \frac{2\pi p_c^2}{(1 - \cos \chi)^2} \sin \chi d\chi = \quad (29B)$$

$$\frac{2\pi p_c^2}{(1 - \cos \chi)^2} \sin \chi \left| \frac{d\chi}{dE'} \right| dE' = \tau(E \rightarrow E') dE'$$

Se sostituiamo il valore  $d\chi/dE'$  dato dall'Eq.(22B) e di  $(1 - \cos \chi)$  dato dall'Eq.(20B) otteniamo

$$\tau(E \rightarrow E') dE' = \frac{\pi \xi^2 m dE'}{m_B E (E - E')^2} [U(E - \alpha E) - U(E - \beta E)] \quad (30B)$$

dove  $U(\chi)$  è la funzione scalino.

## Bibliografia

S.Chapman, T.G.Cowling: *The Mathematical Theory of Nonuniform Gases*, University Press, Cambridge, U.K. 1952

E.H.Holt, R.E.Haskell: *Plasma Dynamics*, Mc Millan Company, New York 1968

N.A.Krall, A.W.Trivelpiece: *Principles of Plasma Physics*, McGraw-Hill, New York, U.S.A., 1973

L.D.Landau , Lifshitz: *Statistical Physics*, Addison-Wesley, Reading, Mass. 1959

S.Manservigi, V.Molinari: *Nuovo Cimento D*, Vol.14, 9-25 (1992)

S.Manservigi, V.Molinari: *Nuclear Science and Engineering*, Vol.1012, 296-300 (1992)

E.W.McDaniel: *Collision Phenomena in Ionized Gases*, New York, U.S.A. 1964

H.Risken: *The Fokker-Planck Equation*, Springer-Verlag, Berlino 1984

I.P.Shkarofsky, T.W.Johnston, M.P.Bachynski: *The particle Kinetics of Plasmas*, Addison-Wesley Publ. Comp., Reading, U.S.A., 1966

A.Sommerfeld: *Thermodynamics and Statistical Mechanics, Lectures on Theoretical Physics*, Vol.5, Academic Press, New York 1956

Sutton, Sherman.....

W.B.Thompson: *Plasma Physics*, Pergamon Press, Oxford, U.K., 1962

Tidman .....