Equivalenza fra forma integro-differenziale ed integrale dell'equazione di Boltzmann.

Premessa: Eq. integro-differenziale di Boltzmann come eq. di Bilancio per fotoni (indipendente dal tempo)

Organizzazione della lezione

1) Breve richiamo all'eq. integro-differenziale per fotoni indipendente dal tempo (problema stazionario)

2) Applicazione del metodo delle caratteristiche per trasformare il termine ~~#~~ $\vec{\Omega} \cdot \nabla f$ in una derivata totale rispetto ad una variabile di lunghezza s su $\vec{\Omega}$.

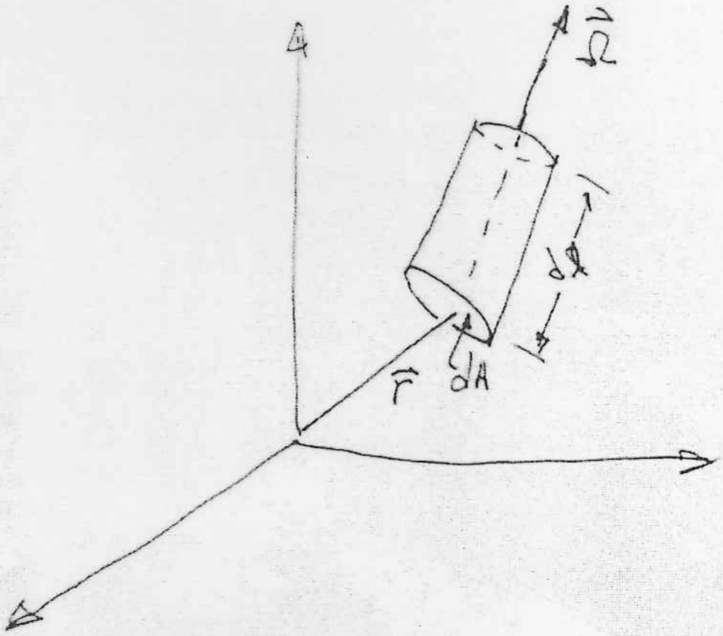
3) ~~All'equazione~~ Introduzione del metodo del fattore integrante per risolvere un equazione differenziale lineare.

4) Applicazione del metodo del fattore integrante per ottenere l'espressione integrale dell'eq. di Boltzmann.

5) Discussione e confronto con l'equazione integro-differenziale.

1) <u>Breve richiamo dell'equazione integro-differenziale per fotoni, indipendente dal tempo.</u>

L'eq. di Boltzmann è un'equazione di bilancio che descrive il numero di fotoni di data lunghezza d'onda λ, direzione $\vec{\Omega}$ che entrano ed escono un cilindro infinitesimale



- <u>flusso</u> $f(\vec{r}, \vec{\Omega}, \lambda)\, d\Omega\, d\lambda$ denota il n. di fotoni con $\lambda \in [\lambda, \lambda + d\lambda]$ e direzione $\vec{\Omega} \in [\vec{\Omega}, \vec{\Omega} + d\vec{\Omega}]$ che attraversano un'area unitaria per unità di tempo
- usiamo λ invece di E
- Il flusso netto con $\vec{\Omega}$ e λ che lascia il cilindro per unità di tempo è

$$f(\vec{r} + \vec{\Omega}\, dl, \vec{\Omega}, \lambda)\, dA - f(\vec{r}, \vec{\Omega}, \lambda)\, dA$$

che in forma differenziale si esprime come

$$\vec{\Omega} \cdot \nabla f(\vec{r}, \vec{\Omega}, \lambda)\, dA\, dl$$

Tre fattori contribuiscono a questo flusso netto

a) l'attenuazione di "fascio stretto" nel volume del cilindro

$$-\mu(\vec{r},\lambda)\, dl\, dA\, f(\vec{r},\vec{\Omega},\lambda)$$

b) lo scattering di fotoni da $\{\vec{\Omega}',\lambda'\} \rightarrow \{\vec{\Omega},\lambda\}$ nel cilindro

$$\int_0^\infty d\lambda' \int_{4\pi} d\Omega' f(\vec{r},\vec{\Omega}',\lambda')\, \underbrace{k(\vec{r},\vec{\Omega},\lambda,\vec{\Omega}',\lambda')}_{\text{probabilità per unità}}\, dl\, dA$$

c) le sorgente di fotoni

$$\underbrace{S(\vec{r},\vec{\Omega},\lambda)}\, dl\, dA$$

densità di fotoni per unità di volume, per unità tempo, per steradian e per unità di λ.

Così si ottiene l'equazione integro-differenziale di Boltzmann per fotoni (indipendente dal tempo)

$$\vec{\Omega}\cdot\nabla f(\vec{r},\vec{\Omega},\lambda) = -\mu(\vec{r},\lambda) f(\vec{r},\vec{\Omega},\lambda)$$
$$+ \int_0^\infty d\lambda' \int_{4\pi} d\Omega' k(\vec{r},\vec{\Omega},\lambda,\vec{\Omega}',\lambda') f(\vec{r},\vec{\Omega}',\lambda')$$
$$+ S(\vec{r},\vec{\Omega},\lambda)$$

Come eq. diff. del primo ordine (in $\vec{r}$) necessita di condizioni al contorno:

Proprietà del sistema: i) Volume V, contornato da una superficie S
ii) Non rientrante: un fotone che lascia la superficie S non può più rientrare da un'altra parte.

Fisicamente questo significa $f(\vec{r}_s,\vec{\Omega},\lambda) = \Gamma(\vec{r}_s,\vec{\Omega},\lambda)$, $\vec{n}\cdot\vec{\Omega} < 0$

punto sulla superficie S

Addizionalmente si possono definire le condizioni al contorno per il "vuoto" o di "superficie libera"

$$f(\vec{\xi}, \vec{\Omega}, t) = 0 \qquad \vec{n} \cdot \vec{\Omega} < 0$$

Queste stabiliscono semplicemente che non ci sono fotoni che possono entrare nel sistema attraversando la superficie S.

2) Applicazione del metodo delle caratteristiche per trasformare il termine $\vec{\Omega}\cdot\nabla f$ (2.1)

$$\vec{\Omega}\cdot\nabla f = \left(\Omega_x \frac{\partial}{\partial x} + \Omega_y \frac{\partial}{\partial y} + \Omega_z \frac{\partial}{\partial z}\right) f$$

~~troviamo ∇ una lunghezza sulla direzione $\vec{\Omega}$~~

vogliamo trasformare il termine in una derivata totale rispetto ad una variabile S

$$-\frac{df}{ds} = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}\right)$$

Confrontando le due equazioni vediamo che sono uguali se

$$-\frac{\partial x}{\partial s} = \Omega_x$$

$$-\frac{\partial y}{\partial s} = \Omega_y$$

$$-\frac{\partial z}{\partial s} = \Omega_z$$

e quindi

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 - s\Omega_x \\ y &= y_0 - s\Omega_y \\ z &= z_0 - s\Omega_z \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 - s\vec{\Omega}$$

S acquista il significato di lunghezza sulla direzione $\vec{\Omega}$ (misurata da $\vec{r}_0$ in senso opposto a $\vec{\Omega}$)

Sostituendo $\vec{r}$ nell eq. integro-differenziale otteniamo
(e rinominando $\vec{r}_0$ come $\vec{r}$)

$$\vec{\Omega}\cdot\nabla f \Rightarrow -\frac{df}{ds}(\vec{r}-\vec{\Omega}s, \vec{\Omega}, \lambda)$$

$$-\mu f \Rightarrow -f(\vec{r}-\vec{\Omega}s, \vec{\Omega}, \lambda)\,\mu(\vec{r}-\vec{\Omega}s, \lambda)$$

$$\int d\lambda' \int d\Omega'\, k(\vec{\Omega}, \lambda, \vec{\Omega}', \lambda') f(\vec{r}, \vec{\Omega}', \lambda') \longrightarrow \int d\lambda' \int d\Omega'\, k^{\vec{r}-\vec{\Omega}s}(\vec{\Omega}, \lambda, \vec{\Omega}', \lambda')\, f(\vec{r}-\vec{\Omega}s, \vec{\Omega}, \lambda)$$

$$S(\vec{r}, \vec{\Omega}, \lambda) \longrightarrow S(\vec{r}-\vec{\Omega}s, \vec{\Omega}, \lambda)$$

L'equazione del trasporto diventa

$$\boxed{-\frac{df}{ds}(\vec{r}-\vec{\Omega}s, \vec{\Omega}, \lambda) + \mu^{(\vec{r}-\vec{\Omega}s, \lambda)} f(\vec{r}-\vec{\Omega}s, \vec{\Omega}, \lambda) = Q(\vec{r}-\vec{\Omega}s, \vec{\Omega}, \lambda)}$$

con

$$Q(\vec{r}-s\vec{\Omega}, \vec{\Omega}, \lambda) = \int d\lambda' \int d\Omega'\, k^{\vec{r}-\vec{\Omega}s}(\vec{\Omega}, \lambda, \vec{\Omega}', \lambda') f(\vec{r}-\vec{\Omega}s, \vec{\Omega}', \lambda') + S(\vec{r}-\vec{\Omega}s, \vec{\Omega}, \lambda)$$

3) Metodo del fattore integrante

Un eq. dif. lineare del primo ordine può essere scritta come

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \longrightarrow P, Q \text{ solo funzioni di } x$$

[Proviamo col metodo della variazione dei parametri: prima $Q=0$ → poi $Q\neq0$ con costante]

Se $Q = 0$ (eq. omogenea)

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = -P(x)\,dx$$

integrando $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = -\int P(x)\,dx$

$$\ln y - \ln y_0 = -\int P(x)\,dx$$

$$y = y_0\, e^{-\int P(x)\,dx} \longrightarrow y = \underset{\text{costante}}{u}\, e^{-\int P(x)\,dx}$$

Per $Q \neq 0$ ipotizziamo la stessa forma per y

ma con $u = u(x)$

Inseriamo y nell'equazione:

Prima calcoliamo la derivata

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} e^{-\int P(x)\,dx} + u\, e^{-\int P(x)\,dx}\left(-P(x)\right)$$

$$= \left(\frac{du}{dx} - Pu\right) e^{-\int P(x)\,dx}$$

e poi l'equazione diventa

$$\left(\frac{du}{dx} - \cancel{Pu}\right)e^{-\int P(x)\,dx} + \cancel{Pu}\,e^{-\int P(x)\,dx} = Q$$

e rimane

$$\frac{du}{dx} e^{-\int P(x)\,dx} = Q$$

e quindi

$$du = Q\, e^{\int P(x)\,dx}\, dx$$

integrando

$$u = C + \int Q\, e^{\int P(x)\,dx'}\, dx$$

Così finalmente si può scrivere la soluzione y come

$$\boxed{y = C\, e^{-\int P(x)\,dx} + e^{-\int P(x)\,dx} \int Q\, e^{\int P(x)\,dx'}\, dx}$$

Osservazione:

Dall'eq. di partenza $\quad \frac{dy}{dx} + Py = Q$

e dall'eq. risultante $\quad \frac{du}{dx} e^{-\int P(x)\,dx} = Q$

otteniamo

$$\underbrace{\left(\frac{dy}{dx} + Py\right) e^{\int P(x)\,dx}}_{\text{differenziale perfetto}} = \frac{du}{dx}$$

fattore integrante

$$\frac{d}{dx}\left(y\, e^{\int P(x)\,dx}\right)$$

$\Rightarrow$ l'eq. con fattore integrante è $\quad \boxed{\frac{d}{dx}\left(y e^{\int P(x)\,dx}\right) = Q\, e^{\int P(x')\,dx'}}$

4) Applicazione del metodo del fattore integrante

Il fattore integrante in questo caso é (per via del segno – nelle derivate)

$$e^{-\int_{s_0}^{s} \mu(\vec{r} - \vec{\Omega} s'', \lambda)\, ds''}$$

Così, l'eq. del trasporto diventa:

$$-\frac{d}{ds}\left\{ f(\vec{r} - \vec{\Omega} s, \vec{\Omega}, \lambda)\, e^{-\int_{s_0}^{s} \mu(\vec{r} - \vec{\Omega} s'', \lambda)\, ds''} \right\} =$$

$$= Q(\vec{r} - s\vec{\Omega}, \vec{\Omega}, \lambda)\, e^{-\int_{s_0}^{s} \mu(\vec{r} - \vec{\Omega} s'', \lambda)\, ds''}$$

dove s_0 é un punto arbitrario su s

Questa equazione può essere integrata da s_0 a s per ottenere

$$f(\vec{r} - s\vec{\Omega}, \vec{\Omega}, \lambda)\, e^{-\int_{s_0}^{s} ds' \mu(\vec{r} - s'\vec{\Omega}, \lambda)} - f(\vec{r} - s_0\vec{\Omega}, \vec{\Omega}, \lambda) =$$

$$= -\int_{s_0}^{s} ds'\, Q(\vec{r} - s'\vec{\Omega}, \vec{\Omega}, \lambda)\, e^{-\int_{s_0}^{s'} ds'' \mu(\vec{r} - s''\vec{\Omega}, \lambda)}$$

Riscrivendo l'equazione si ottiene (moltiplicando per $\left[e^{+\int_{s_0}^{s} ds''\,\mu(\vec{r}-s''\vec{\Omega},\lambda)}\right]$) 4.2

$$f(\vec{r}-s\vec{\Omega},\vec{\Omega},\lambda) = f(\vec{r}-s_0\vec{\Omega},\vec{\Omega},\lambda)\, e^{\int_{s_0}^{s} ds''\,\mu(\vec{r}-s''\vec{\Omega},\lambda)} +$$

$$+ \int_{s}^{s_0} ds'\, Q(\vec{r}-s'\vec{\Omega},\vec{\Omega},\lambda)\, e^{\int_{s'}^{s} ds''\,\mu(\vec{r}-s''\vec{\Omega},\lambda)}$$

Mettendo $s=0$ si trova il flusso nel punto $\vec{r}$ (su $\vec{\Omega}$)

$$f(\vec{r},\vec{\Omega},\lambda) = f(\vec{r}-s_0\vec{\Omega},\vec{\Omega},\lambda)\, e^{-\int_{0}^{s_0} ds''\,\mu(\vec{r}-s''\vec{\Omega},\lambda)} +$$

$$+ \int_{0}^{s_0} ds'\, Q(\vec{r}-s'\vec{\Omega},\vec{\Omega},\lambda)\, e^{-\int_{0}^{s'} ds''\,\mu(\vec{r}-s''\vec{\Omega},\lambda)}$$

Per valutare la costante d'integrazione $f(\vec{r}-s_0\vec{\Omega},\vec{\Omega},\lambda)$ utilizziamo la condizione al contorno

$$f(\vec{r}_s,\vec{\Omega},\lambda) = \Gamma(\vec{r}_s,\vec{\Omega},\lambda), \quad \vec{n}\cdot\vec{\Omega} < 0$$

(flusso entrante attraverso la superficie S)

Sia s_0 tale che $\vec{r}-s_0\vec{\Omega} = \vec{r}_s$ (un punto sulla superficie S di contorno)

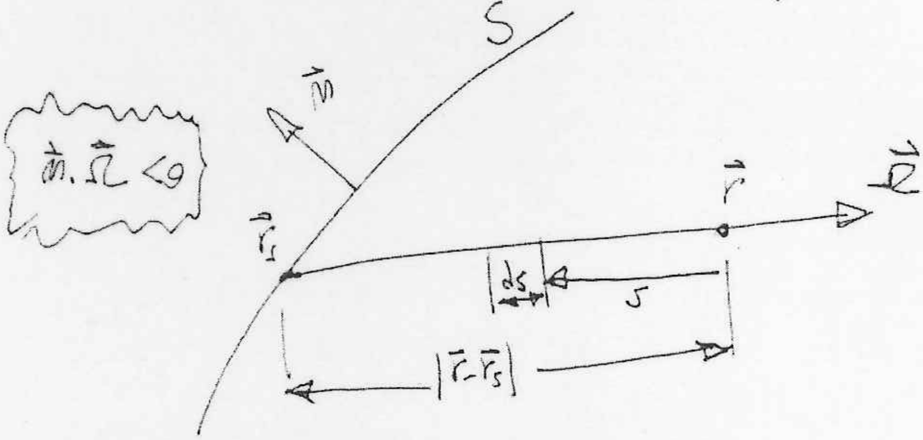
Quindi $s_0 = |\vec{r}-\vec{r}_s|$ e

$$f(\vec{r}-s_0\vec{\Omega},\vec{\Omega},\lambda)\Big|_{s_0=|\vec{r}-\vec{r}_s|} = \Gamma(\vec{r}_s,\vec{\Omega},\lambda)$$

Sostituendo $s_0 = |\vec{r}-\vec{r}_s|$ e utilizzando la condizione al contorno, otteniamo il risultato finale:

$$\boxed{f(\vec r,\vec\Omega,\lambda) = \Gamma(\vec r_s,\vec\Omega,\lambda)\, e^{-\int_0^{|\vec r-\vec r_s|} ds''\,\mu(\vec r - s''\vec\Omega,\lambda)} + \int_0^{|\vec r-\vec r_s|} ds'\, Q(\vec r - s'\vec\Omega,\vec\Omega,\lambda)\, e^{-\int_0^{s'} ds''\,\mu(\vec r-s''\vec\Omega,\lambda)}} \qquad (4.3)$$

L'interpretazione fisica dell'equazione è la seguente:



Primo termine: rappresenta ~~l'intensità incidente~~ il contributo al flusso in $\vec r$ proveniente dalla superficie S, attenuato sulla distanza fra $\vec r_s$ ed $\vec r$.

Secondo termine: rappresenta il contributo al flusso dovuto a "sorgenti + scattering" proveniente da ogni elemento di cammino ds' lungo $\vec\Omega$.
Ogni contributo è calcolato ~~attenuato~~ esponenzialmente la radiazione prodotta in ds'

Nota: ricordare che

$$Q(\vec r - s'\vec\Omega,\vec\Omega,\lambda) = \underbrace{\int d\lambda' \int d\Omega'\, k^{\vec r-\vec\Omega s'}(\vec\Omega,\lambda,\vec\Omega',\lambda')\, f(\vec r-\vec\Omega s',\vec\Omega',\lambda')}_{\text{scattering}} + \underbrace{S(\vec r-\vec\Omega s',\vec\Omega,\lambda)}_{\text{sorgente}}$$

Vantaggio di questa rappresentazione:

1) La condizione al contorno ~~si riduce~~ diventa parte dell'equazione

Osservazioni

1) L'equazione non rappresenta la soluzione dell'equazione del trasporto, ma è un'equazione integrale già che il flusso f si trova all'interno dell'integrale del secondo termine.

2) Per un kernel di scattering nullo, l'equazione rappresenta direttamente la soluzione per il flusso incolliso

$$f(\vec{r},\vec{\Omega},\lambda) = \Gamma\, e^{-\int_0^{|\vec{r}-\vec{r}_s|} ds''\, \mu(\vec{r}-s''\vec{\Omega},\lambda)} +$$

$$+ \int_0^{|\vec{r}-\vec{r}_s|} ds'\, S(\vec{r}-s'\vec{\Omega},\vec{\Omega},\lambda)\, e^{-\int_0^{s'} ds''\, \mu(\vec{r}-s''\vec{\Omega},\lambda)}$$

3) La soluzione per "vuoto" all'esterno (cioè, non ritorno dei fotoni che escono attraverso la superficie S) si rappresenta come $\Gamma(\vec{r}_s,\vec{\Omega},\lambda) \equiv 0$

In questo caso l'equazione è formata solo dal secondo termine:

$$f(\vec{r},\vec{\Omega},\lambda) = \int_0^{|\vec{r}-\vec{r}_s|} ds'\, Q(\vec{r}-s'\vec{\Omega},\vec{\Omega},\lambda)\, e^{-\int_0^{s'} ds''\, \mu(\vec{r}-s''\vec{\Omega},\lambda)}$$

Esempio

È immediato la soluzione mediante una serie di Neumann (in ordini di collisione)

$$f = \underset{\text{incollisi}}{f^{(0)}} + \underset{\text{collisi una volta}}{f^{(1)}} + \underset{\text{due volte}}{f^{(2)}} + \cdots \text{ etc.}$$

La soluzione per il flusso incolliso $f^{(0)}$ si ottiene annullando il termine di scattering. (Vedi Oss § 2)

$$f^{(0)} = \int_0^{|\vec{r}-\vec{r}_s|} ds' \, S(\vec{r}-s'\vec{\Omega},\vec{\Omega},\lambda)\, e^{-\int_0^{s'} ds''\,\mu(\vec{r}-s''\vec{\Omega},\lambda)}$$

Le altre soluzioni si ottengono facilmente valutando separatamente il flusso costituito dei fotoni che abbiano subito una collisione, due, ecc. eliminando il termine di sorgente e rimpiazzando f con $f^{(n-1)}$ nel termine di scattering e con $f^{(n)}$ nel resto dell'equazione. Finalmente si ottiene l'espressione generale:

$$f^{(n)}(\vec{r},\vec{\Omega},\lambda) = (1-\delta_{n0})\int_0^{|\vec{r}-\vec{r}_s|} ds' \iint_{d\lambda'\,d\Omega'} k(\vec{r}-\vec{\Omega}s',\vec{\Omega},\lambda,\vec{\Omega}',\lambda')\, f^{(n-1)}(\vec{r}-\vec{\Omega}s',\vec{\Omega}',\lambda')\, e^{-\int_0^{s'} ds''\,\mu(\vec{r}-s''\vec{\Omega},\lambda)} +$$

$$+\ \delta_{n0}\left\{\int_0^{|\vec{r}-\vec{r}_s|} ds'\, S(\vec{r}-s'\vec{\Omega},\vec{\Omega},\lambda)\, e^{-\int_0^{s'} ds''\,\mu(\vec{r}-s''\vec{\Omega},\lambda)}\right\}$$

Calcolare la soluzione equivale a calcolare un numero di integrali multipli → MC

4) L'eq. di trasporto dipendente dal tempo si può trasformare analogamente in un eq. integrale, mediante la trasformazione dei termini:

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}\right)f = -\frac{df}{ds}$$

con il metodo delle caratteristiche.

Il tempo t viene così trasformato in:

$$t \to t - s/c$$

Il resto della dimostrazione è analogo a quello sviluppato precedentemente.