# Spettro elettromagnetico

Radiazione elettromagnetica $\longrightarrow$ composta di onde con varie lunghezze d'onda e frequenze

(visibile $\rightarrow$ prisma)

Relazione fra la frequenza e la lunghezza d'onda:

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

$c$ $\rightarrow$ velocità della luce nel vuoto ($= 3\ 10^{10}$ cm/s)

$\nu$ $\rightarrow$ frequenza

$\lambda$ $\rightarrow$ lunghezza d'onda

Relazione fra l'energia e la frequenza:

$$E = h\nu$$

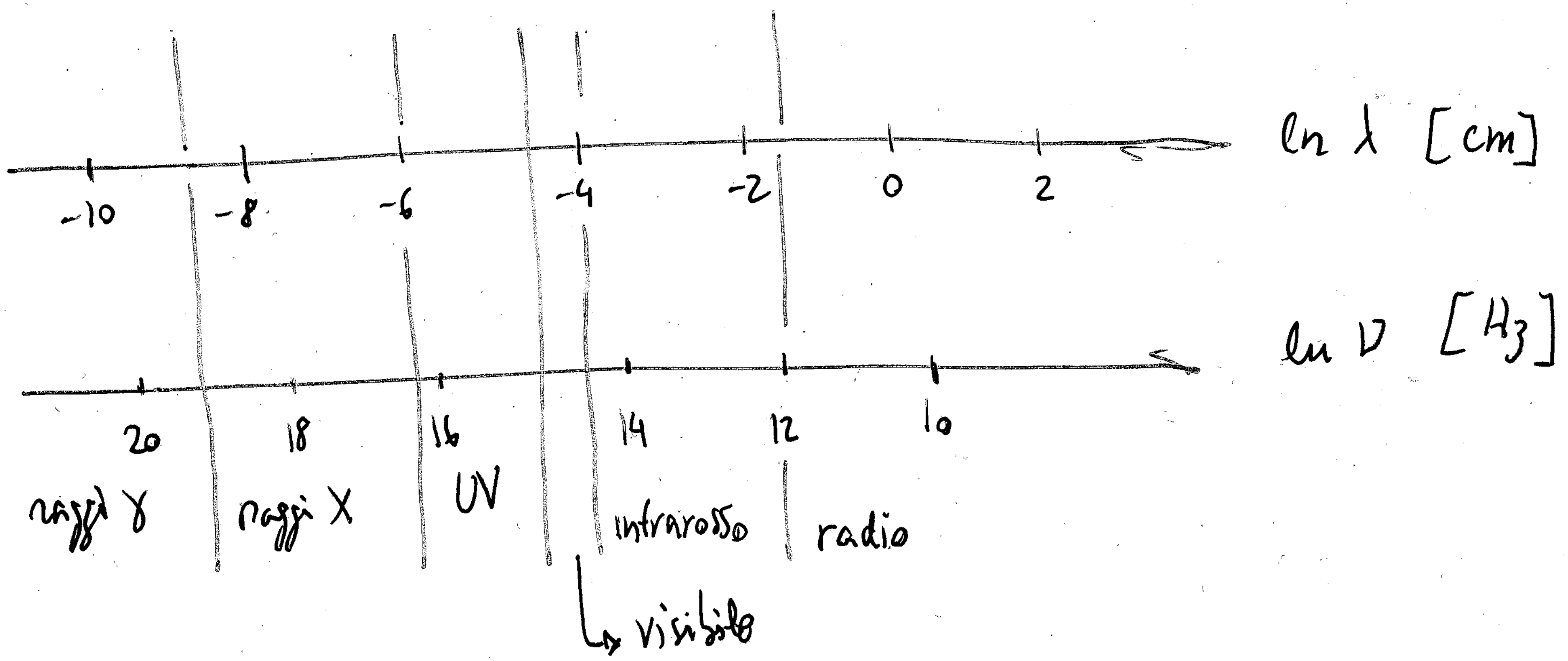
$h$ $\rightarrow$ costante di Plank ($= 6.625\ 10^{-27}$ erg s)

Relazione fra l'energia e la temperatura:

$$T = \frac{E}{k}$$

$k$ $\rightarrow$ costante di Boltzmann ($= 1.38\ 10^{-16}\ \frac{\text{erg}}{°K}$)

# Spettro elettromagnetico



# Flusso radiativo

La radiazine viaggia per linee rette (raggi)
(è vero quando $L$ (scala del sistema) $\gg \lambda$)

Energia che passa per $dA$ (superficie elementare) e per $dt$

$$\propto dA\, dt$$

scriviamo come

$$F\, dA\, dt$$

$F$ → flusso di energia (in $\left[\frac{erg}{cm^2\, s}\right]$)

## Vediamo il seguente ESEMPIO

Sorgente isolata (ad esempio, una stella, emette isotropicamente)


$S_1$ ed $S_2$ due superfici sferiche concentriche con la sorgente in centro

Energia che passa per $S_1$ = Energia che passa per $S_2$
(per conservazione dell'energia)

$$\Rightarrow F(R)\, 4\pi R^2 = F(r_1)\, 4\pi r_1^2$$

$$\Rightarrow F(R) = F(r_1) \frac{r_1^2}{R^2} = \frac{\text{costante}}{R^2} \quad (\text{per } S_1 \text{ fissa})$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{conservazione dell'energia} \Rightarrow F(R) = \frac{cte}{R^2}}$$

Definizione di Intensità specifica o lucentezza (brightness)

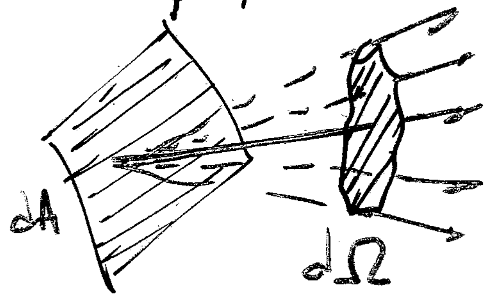
Flusso $\longrightarrow$ misura l'energia portata da tutti i raggi che passano per un'area

Consideriamo l'energia trasportata da un insieme di raggi che differiscono "poco" fra di loro

↳ in maniera infinitesimale

$\Longrightarrow$ possiamo considerare un raggio "portante" (con una direzione)

Sia $dA$ perpendicolare alla direzione del "raggio portante"




tutte le direzioni si trovano all'interno di $d\Omega$

Energia che attraversa $dA$ nel tempo $dt$ per intervallo di frequenza $d\nu$ è:

$$dE = I_\nu \, dA \, dt \, d\Omega \, d\nu$$

↳ $I_\nu$: intensità specifica o lucentezza (o brightness)

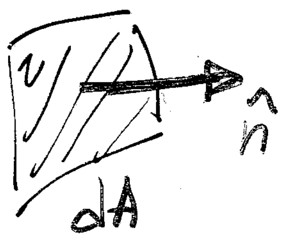
$$[I_\nu] = \left[\frac{erg}{cm^2 \ ster \ Hz \ s}\right]$$

$I_\nu = I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, \nu)$ in generale

# Flusso netto e quantità di moto

Generico campo di radiazione $\longrightarrow$ raggi in tutte le direzioni

Definiamo un area $dA$ caratterizzata da un vettore $\hat{n}$ normale alla superficie




Flusso differenziale entro $d\Omega$ è dato da

$$dF_\nu = I_\nu \underbrace{\cos\theta \, d\Omega}_{d\vec{\Omega}\cdot\hat{n}}$$

Flusso netto $= \int dF_\nu = \int I_\nu \cos\theta \, d\Omega$

Esempi: $I_\nu$ isotropo

$$\Rightarrow \int dF_\nu = I_\nu \int \cos\theta \, d\Omega \equiv 0$$

$\Rightarrow$ c'è tanta energia attraversando lungo la direzione $\hat{n}$ come in $-\hat{n}$

## Quantità di moto di un fotone

$$p = \frac{E}{c}$$

$p \rightarrow$ quantità di moto

Flusso di quantità di moto lungo un raggio che fa un angolo $\theta$ con $\hat{n}$ é:

$$\frac{dF_\nu}{c}$$

Componente del flusso di quantità di moto normale a $dA$ é

$$\frac{dF_\nu \cos\theta}{c} = \frac{I_\nu}{c} \cos^2\theta \, d\Omega$$

L'integrale da (una pressione)

$$p_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu \cos^2\theta \, d\Omega$$

$F_\nu$ e $p_\nu$ sono "momenti" di $I_\nu$

Integrando sulle frequenze si ottengono

$F = \int F_\nu \, d\nu$ (flusso totale di energia)

$p = \int p_\nu \, d\nu$ (pressione totale)

## Densità di energia radiante $u_\nu$

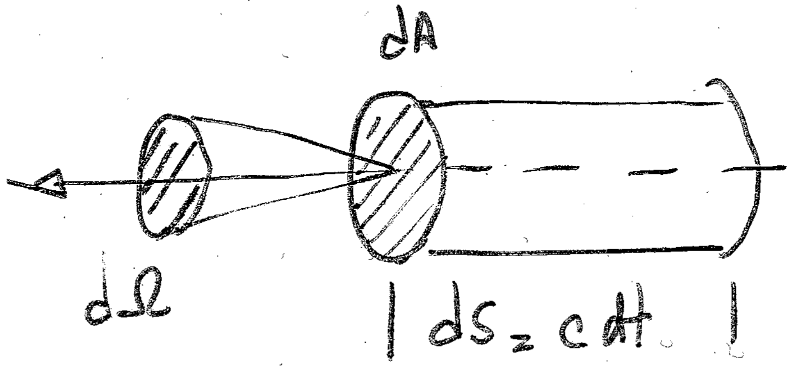
$u_\nu$ = energia per unità di volume e per unità di intervallo di frequenza

Prima consideriamo

$u_\nu(\Omega)$ = densità di energia per unità di angolo solido

$$dE = u_\nu(\Omega)\, dV\, d\Omega\, d\nu$$

↳ volumetto infinitesimale




$dV = dA\, ds$

$dE$ è anche la energia che passa attraverso $dA$

$$dE = I_\nu\, dA\, d\Omega\, dt\, d\nu$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{u_\nu(\Omega) = \frac{I_\nu}{c}}$$

Integrando

$$u_\nu = \int u_\nu(\Omega)\, d\Omega = \frac{1}{c}\int I_\nu\, d\Omega = \frac{4\pi}{c} J_\nu$$

dove $J_\nu$ (intensità media) $= \dfrac{1}{4\pi}\int I_\nu\, d\Omega$

La densitá totale di radiazione $u$ si ottiene integrando su tutte le frequenze

$$u = \int u_\nu \, d\nu = \frac{4\pi}{c} \int J_\nu \, d\nu$$

Pressione della radiazione

Consideriamo una superficie chiusa, riflettente, contenente un campo isotropo di radiazione

Quantitá di moto trasferita alla superficie ad ogni riflessione

$$\Delta p = 2p_\nu = \frac{2}{c} \int_{2\pi} I_\nu \cos^2\theta \, d\Omega$$

[notare che é equivalente a la precedente]

$$= \frac{1}{c} \int_{4\pi} I_\nu \cos^2\theta \, d\Omega$$

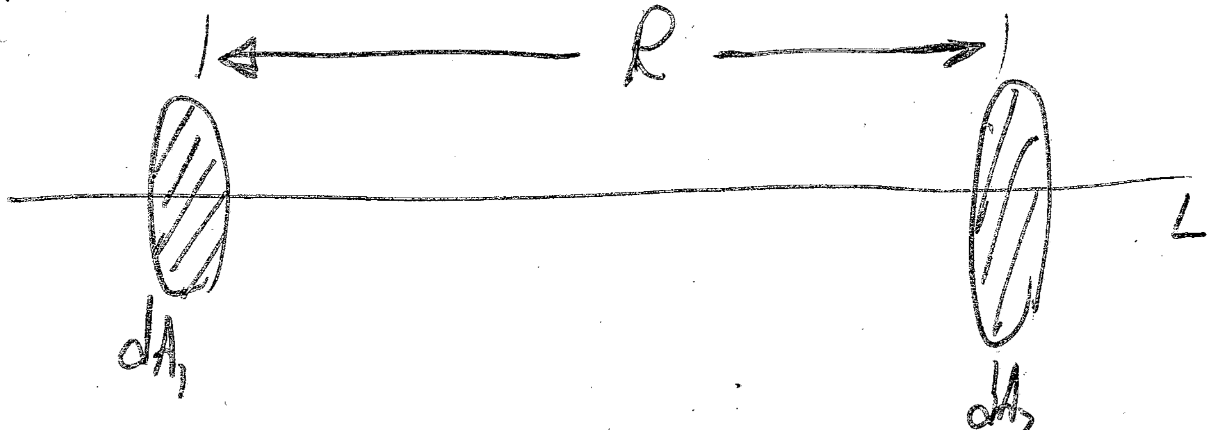
come é isotropa, $I_\nu = J_\nu$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{2}{c} \int J_\nu \, d\nu \underbrace{\int_{2\pi} \cos^2\theta \, d\Omega}_{2\pi \int^{\pi/2} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta = \frac{2\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{p = \frac{1}{3} \frac{4\pi}{c} \int J_\nu \, d\nu = \frac{u}{3}}$$

$\boxed{\text{L'intensità specifica } I_\nu \text{ lungo i raggi è una costante nello spazio libero}}$

Consideriamo un raggio L e due aree $dA_1$ e $dA_2$ normali ad esso




L'energia trasportata dai raggi attraverso le aree è la stessa:

$$dE_1 = I_{\nu_1}\, dA_1\, dt\, d\Omega_1\, d\nu_1 = dE_2$$
$$= I_{\nu_2}\, dA_2\, dt\, d\Omega_2\, d\nu_2$$

$d\Omega_1$ è l'angolo solido sotteso da $dA_2$ visto da $dA_1$

$\Longrightarrow$ $d\Omega_1 = \dfrac{dA_2}{R^2}$ e similmente $d\Omega_2 = \dfrac{dA_1}{R^2}$

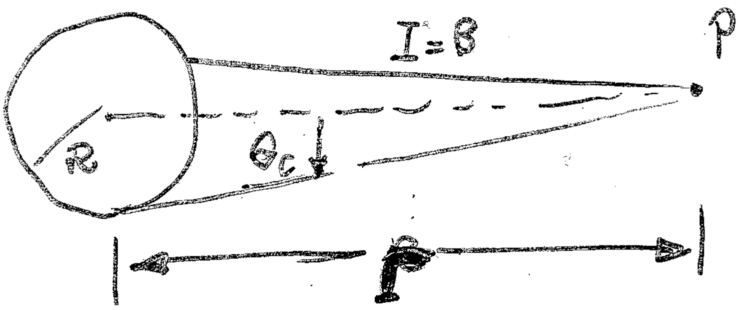
Siccome $d\nu_1 = d\nu_2 \Longrightarrow \boxed{I_{\nu_1} = I_{\nu_2}}$ o $\boxed{I_\nu = \text{cte}}$

o $\boxed{\dfrac{dI_\nu}{ds} = 0}$

Mostriamo che non c'è conflitto tra la costanza dell'intensità specifica e la legge inversa del quadrato

Consideriamo una sfera che emette con lucentezza uniforme (tutti i raggi emessi hanno la stessa lucentezza $B$)

$\Rightarrow$ è una sorgente isotropa




Flusso in P:

$$F = \int I \cos\theta \, d\Omega = B \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\theta_c} \sin\theta \cos\theta \, d\theta$$

con $\theta_c = \arcsin \frac{R}{r}$

$$\Rightarrow \quad F = \pi B \left(1 - \cos^2\theta_c\right)$$

$$= \pi B \sin^2\theta_c$$

$$= \pi B \left(\frac{R}{r}\right)^2$$

si ricupera la legge dell'inverso del quadrato della distanza

Se $r = R \Rightarrow F = \pi B$ (flusso attraverso la superficie)

# Trasferimento radiativo

Quando un raggio attraversa la materia, l'energia può essere aumentata o diminuita mediante i fenomeni di emissione e assorbimento (e scattering).

## Emissione

Coefficiente di emissione spontanea $j$ è l'energia emessa per unità tempo, angolo solido e volume

$$dE = j \, dt \, d\Omega \, dV$$

Similmente si definisce il coeff di emissione spontanea monocromatico $j_\nu$ tale che

$$dE = j_\nu \, dt \, d\Omega \, dV \, d\nu$$

In generale $j$ e $j_\nu$ dipendono dalla direzione di emissione. Per un emettitore isotropo si ha

$$j_\nu = \frac{P_\nu}{4\pi} \longrightarrow \text{potenza irradiata per unità volume e frequenza}$$

A volte si usa l'emissività $\varepsilon_\nu$ (energia emessa spontaneamente per unità frequenza, tempo, massa, ma integrata nell'angolo solido)

Per l'emettitore isotropo

$$dE = \varepsilon_\nu \rho \, dV \, dt \, d\nu \, \frac{d\Omega}{4\pi}$$

comparando entrambe espressioni si ha

$$j_\nu = \frac{\varepsilon_\nu \rho}{4\pi} \quad (\text{emissione isotropa})$$

Nel percorrere una distanza $ds$, un fascio di sezione $dA$ attraversa un volume $ds\,dA = dV$, quindi l'intensità aggiunta dall'emissione spontanea é

$$dI_\nu = j_\nu \, ds$$

## Assorbimento

Definiamo il coefficiente di assorbimento $\alpha_\nu$ [$cm^{-1}$] con l'equazione seguente per la perdita di intensitá lungo $ds$

$$\boxed{dI_\nu = -\alpha_\nu I_\nu \, ds} \qquad \alpha_\nu > 0$$

In termini microscopici, se si hanno $n$ particelle per unitá volume ciascuna con una sezione d'urto $\sigma_\nu$ [$cm^2$], l'area totale assorbente é data da

$$n \sigma_\nu \, dA \, ds$$

e l'energia assorbita é

$$-dI_\nu \, dA \, d\Omega \, dt \, d\nu = I_\nu (n \sigma_\nu \, dA \, ds) \, d\Omega \, dt \, d\nu$$

$$\Rightarrow \quad dI_\nu = -n \sigma_\nu I_\nu \, ds \quad (\text{legge equivalente})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\alpha_\nu = n \sigma_\nu}$$

Spesso il coeff. di assorbimento é scritto come:

$$\alpha_\nu = \rho \, K_\nu$$

$K_\nu$ → coefficiente di opacità $[cm^2/g]$ (o coeff. di assorbimento per unità di massa)

$\rho$ → densità di massa

Condizioni di applicabilità

1) La scala lineare della sezione d'urto minore della distanza media tra le particelle

$$\sigma_\nu^{1/2} \ll d \sim n^{-1/3} \Rightarrow \alpha_\nu d \ll 1$$

2) le particelle sono indipendenti e distribuite casualmente

Nell' assorbimento si considera:
il vero assorbimento
é l'emissione stimolata } entrambi proporzionali all'intensità del fascio

## L' equazione del trasferimento radiativo

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \underbrace{-\alpha I_\nu}_{} + j_\nu$$

$j_\nu$ → emissione spontanea

$-\alpha I_\nu$ → assorbimento netto

$\frac{dI_\nu}{ds}$ → variazione dell'intensità specifica lungo il raggio

NOTA: manca ancora lo scattering (che fa l'eq. più complicata)

Consideriamo due casi limite:

a) <u>Sola emissione</u>: $\alpha_\nu \equiv 0$

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu$$

con soluzione formale

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0) + \int_{s_0}^{s} j_\nu(s')\, ds'$$

la variazione di intensità è pari all'integrale del coeff. di emissione spontanea

b) <u>solo assorbimento</u>: $j_\nu = 0$

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu$$

con soluzione

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0) \exp\left\{ -\int_{s_0}^{s} \alpha_\nu(s')\, ds' \right\}$$

l'intensità diminuisce di un fattore esponenziale dato dall'integrale del coeff di assorbimento

## Spessore ottico e funzione sorgente

cambiamento di variabile

$$d\tau_\nu = \alpha_\nu\, ds$$

$\tau_\nu$ spessore ottico

$$\Rightarrow \tau_\nu = \int_{s_0}^{s} \alpha_\nu(s')\, ds'$$

$s_0$ un punto arbitrario, definisce lo zero della scala

$\tau_\nu > 1$ mezzo opaco

$\tau_\nu < 1$ mezzo trasparente

dividendo l'equazione per $\alpha_\nu$ si ottiene

$$\boxed{\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu}$$

$\to$ funzione sorgente

dove
$$S_\nu \equiv \frac{j_\nu}{\alpha_\nu}$$

<u>Soluzione dell'equazione:</u>

Moltiplichiamo per il fattore integrante $e^{\tau_\nu}$ e definiamo

$$\mathcal{I} = I_\nu e^{\tau_\nu} \quad e \quad \mathcal{S} = S_\nu e^{\tau_\nu}$$

Si ottiene

$$\frac{d\mathcal{I}}{d\tau_\nu} = \mathcal{S}$$

con soluzione

$$\mathcal{I}(\tau_\nu) = \mathcal{I}(0) + \int_0^{\tau_\nu} \mathcal{S}(\tau_\nu')\, d\tau_\nu'$$

Sostituendo $I_\nu$ ed $S_\nu$ si ha:

$$\boxed{I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)\, e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} \exp\left[-(\tau_\nu - \tau_\nu')\right] S_\nu(\tau_\nu')\, d\tau_\nu'}$$

Esempio: sorgente costante

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)\, e^{-\tau_\nu} + S_\nu\left(1 - e^{-\tau_\nu}\right)$$
$$= S_\nu + e^{-\tau_\nu}\left(I_\nu(0) - S_\nu\right)$$

Se $\tau_\nu \to \infty \to I_\nu \to S_\nu$

## Libero cammino medio

Def: distanza media che un fotone può percorrere (in un mezzo assorbente) senza essere assorbito.
Si esprime in termini del coeff. di assorbimento $\tau_\nu$

$e^{-\tau_\nu} \longrightarrow$ probabilità di percorrere uno spessore ottico $\tau_\nu$

Calcoliamo lo spessore ottico medio percorso

$$\langle \tau_\nu \rangle \equiv \int_0^\infty \tau_\nu\, e^{-\tau_\nu}\, d\tau_\nu$$

$$= 1 \quad \text{(si può dimostrare facilmente calcolando l'integrale)}$$

Libero cammino medio $l_\nu$ é dato da

$$\langle \tau_\nu \rangle = l_\nu \alpha_\nu = 1 \implies \boxed{l_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu} = \frac{1}{n\sigma_\nu}}$$

## Forza esercitata dalla radiazione

Siccome la radiazione trasporta una quantità di moto, esercita una forza sul mezzo.

Definiamo un vettore flusso della radiazione

$$\vec{F}_\nu = \int I_\nu \, \hat{n} \, d\Omega$$

versore lungo la direzione del raggio

Ricordando che la quantità di moto è pari a $E/c$,
la quantità di moto per unità area, tempo e lunghezza è data da

assorbita

$$\vec{\mathcal{F}} = \frac{1}{c} \int \alpha_\nu \vec{F}_\nu \, d\nu$$

rappresenta la forza per unità volume (visto che $dA\,ds = dV$)

Similarmente si definisce la forza per unità di massa del materiale $\vec{f} = \vec{\mathcal{F}}/\rho$

$$\vec{f} = \frac{1}{c} \int \kappa_\nu \vec{F}_\nu \, d\nu$$